0.2 Rechentechnik

0.2.1 Addition und Subtraktion im Kopf

Addition	Subtraktion
Summand plus **Summand**	**Minuend** minus **Subtrahend**
$32 + 16 = 48$	$48 - 16 = 32$
Summe	**Differenz**

Addition = Hinzufügung von lat. **addere** = hinzufügen
Summand = hinzuzufügende Zahl von lat. **summa** = Summe
Subtraktion = Abziehung von lat. **trahere** = ziehen (Traktor), lat. **subtrahere** = abziehen
Minuend = zu vermindernde Zahl von lat. **minuere** = vermindern
Subtrahend = abzuziehende Zahl
Differenz = Unterschied von lat. **ferre** = tragen, bringen, lat. **differe** = sich auseinanderbewegen

Viele Aufgaben lassen sich besser im Kopf rechnen, wenn man die Zahlen geschickt **zerlegt**. Die **Klammer** gibt an, welche Rechnung zuerst ausgeführt wird:

a)
$32 + 16$
$= (32 + 10) + 6$
$= \quad 42 \quad + 6$
$= \mathbf{48}$

b)
$89 - 17$
$= (89 - 10) - 7$
$= \quad 79 \quad - 7$
$= \mathbf{72}$

c)
$123 - 99$
$= (124 - 100) + 1$
$= \quad 23 \quad + 1$
$= \mathbf{24}$

Mehrfache Summen und Differenzen berechnet man durch geschicktes **Vertauschen** und **Zusammenfassen**. **Die Vertauschung ist nur bei der Addition möglich!**

a)
$32 + 51 + 18$
$= (32 + 18) + 51$
$= \quad 50 \quad + 51$
$= \mathbf{101}$

b)
$123 - 18 - 15$
$= 123 - (18 + 15)$
$= 123 \quad - 33$
$= \mathbf{90}$

c)
$67 - 25 + 18$
$= (67 + 18) - 25$
$= \quad 85 \quad - 25$
$= \mathbf{60}$

Übungen: Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Kopf Nr. 1 – 10

0.2.2 Multiplikation und Division im Kopf

Multiplikation	Division
Faktor mal **Faktor**	**Dividend** geteilt durch **Divisor**
$6 \cdot 12 = 72$	$72 : 6 = 12$
Produkt	**Quotient**

Multiplikation = Vervielfachen von lat. **multus** = viel
Faktor = bewirkende Zahl von lat. **facere** = machen, bewirken
Division = Teilung von lat. **dividere** = teilen
Dividend = zu teilende Zahl
Divisor = Teiler
Produkt = Hinführung, Ergebnis von lat. **ducere** = führen
Quotient = Zahl der Teiler von lat. **quotiens** = wie oft

Viele Aufgaben lassen sich besser im Kopf rechnen, wenn man die Zahlen geschickt **zerlegt**:

a) $16 \cdot 7$

   $= \underbrace{10 \cdot 7} + \underbrace{6 \cdot 7}$

   $= \quad 70 \quad + \quad 42$

   $= \quad \mathbf{112}$

b) $98 \cdot 3$

   $= \underbrace{90 \cdot 3} + \underbrace{8 \cdot 3}$

   $= \quad 270 \quad + \quad 24$

   $= \quad \mathbf{294}$

c) $98 \cdot 3$

   $= \underbrace{100 \cdot 3} - \underbrace{2 \cdot 3}$

   $= \quad 300 \quad - \quad 6$

   $= \quad \mathbf{294}$

Mehrfache Produkte berechnet man durch geschicktes **Vertauschen** und **Zusammenfassen**. **Die Vertauschung ist nur bei der Multiplikation möglich!**

a) $= 25 \cdot 9 \cdot 4$

   $= (25 \cdot 4) \cdot 9$

   $= \quad 100 \cdot 9$

   $= \quad \mathbf{900}$

b) $8 \cdot 7 \cdot 125$

   $= 7 \cdot (8 \cdot 125)$

   $= 7 \cdot \quad 1000$

   $= \mathbf{7000}$

c) $= 9 : 15 \cdot 5$

   $= (9 \cdot 5) : 15$

   $= \quad 45 \quad : 15$

   $= \quad \mathbf{3}$

Übungen: Aufgaben zur Multiplikation und Division im Kopf Nr. 1 – 9

0.2.3 Kopfrechnen mit Zehnerpotenzen

Bei der **Addition** und **Subtraktion** bleibt die Zahl der Nullen **gleich**:

$$2 + 3 = 5$$
$$20 + 30 = 50$$
$$200 + 300 = 500$$

$$5 - 2 = 3$$
$$50 - 20 = 30$$
$$500 - 200 = 300$$

Bei der **Multiplikation bzw. Division** werden die Zahlen der Nullen **addiert bzw. subtrahiert**:

$$2 \cdot 3 = 6$$
$$2 \cdot 30 = 60$$
$$20 \cdot 30 = 600$$
$$20 \cdot 300 = 6000$$
$$200 \cdot 300 = 60000$$

$$6 : 2 = 3$$
$$60 : 2 = 30$$
$$600 : 2 = 300$$
$$600 : 20 = 30$$
$$600 : 200 = 3$$

Übungen: Aufgaben zum Kopfrechnen mit Zehnerpotenzen Nr. 1 – 12

0.2.4 Überschlagsrechnung

Bei der **Überschlagsrechnung** verwendete man **gerundete** Zahlen, um das Ergebnis möglichst **schnell** und **genau** im Kopf **abschätzen** zu können. Dabei muss man **selber entscheiden**, auf **welche Stelle** man rundet: Je höher die Rundungsstelle, desto schneller aber auch desto ungenauer wird die Abschätzung.

Bei der **Addition** und der **Subtraktion** rundet man beide Zahlen auf die **gleiche Stelle**:

a) $423 + 719 + 878 \quad \approx 400 + 700 + 900 \quad = \mathbf{2000}$
b) $374\,671 + 876\,54 \quad \approx 400\,000 + 900\,000 \quad = \mathbf{130\,000}$
c) $1289 - 479 \quad\quad\quad \approx 1300 - 500 \quad\quad\quad = \mathbf{800}$

Bei der **Multiplikation** kann man beide Faktoren **unabhängig** voneinander runden:

a) $1173 \cdot 865 \quad \approx 1000 \cdot 900 \quad\quad = \mathbf{900\,000}$
b) $1173 \cdot 865 \quad \approx 1200 \cdot 900 \quad\quad = \mathbf{1\,080\,000}$
c) $372\,493 \cdot 793 \approx 400\,000 \cdot 800 \quad = \mathbf{3\,200\,000\,000}$

Bei der Division rundet man **zuerst** den **Divisor** und **anschließend** den **Dividenden**, so dass die Rechnung **aufgeht**:

a) $9287 : 89 \quad\quad \approx 9000 : 90 \quad\quad = \mathbf{100}$
b) $1376 : 276 \quad\quad \approx 1200 : 300 \quad\quad = \mathbf{4}$
c) $654\,234 : 6273 \approx 660\,000 : 6000 = \mathbf{110}$

Übungen: Aufgaben zur Überschlagsrechnung Nr. 1 – 7

0.2.5 Schriftliche Addition

Der wesentliche Vorteil des Stellenwertsystems ist die Zerlegung komplizierter Rechnungen mit großen Zahlen in mehrere einfache Rechnungen mit einzelnen Stellen. Bei der schriftlichen Addition schreibt man die beiden Summanden untereinander in eine **Stellenwerttafel** und addiert die einzelnen Stellen. Ist das Ergebnis zweistellig, so schreibt man den **Übertrag** unter die folgende Stelle. Zur **Kontrolle** führt man **immer** zuerst eine **Überschlagsrechnung** durch.

Aufgabe:	3094 + 6535
Überschlag:	3100 + 6500 = **9600**

	T	H	Z	E		
	3	0	9	4		1. Summand
+	6	5	3	5		2. Summand
			1			Übertrag
	9	**6**	**12**	**9**		**Ergebnis**

Aufgabe:	23 489 + 39 781 + 26 653
Überschlag:	23 000 + 40 000 + 27 000 = **90 000**

	ZT	T	H	Z	E		
	2	3	4	8	9		1. Summand
	3	9	7	8	1		2. Summand
+	2	6	6	5	3		3. Summand
		1	1	2	1		Übertrag
	8	**19**	**19**	**22**	**13**		**Ergebnis**

Übungen: Aufgaben zur schriftlichen Addition Nr. 1 - 5

0.2.6 Schriftliche Subtraktion

Geht die Subtraktion in einer Stelle nicht auf, so nimmt man beim Minuend eine Zehnerpotenz hinzu und zieht sie dafür bei der folgenden Stelle als **Übertrag** zusätzlich ab:

Aufgabe:	3792 – 1278
Überschlag:	3800 – 1300 = **2500**

	T	H	Z	E		
	3	7	9	12		Minuend
–	1	2	7	8		Subtrahend
			1			Übertrag
	2	**5**	**1**	**4**		**Ergebnis**

Aufgabe:	43 732 – 21 458
Überschlag:	44 000 – 21 000 = **23 000**

	ZT	T	H	Z	E		
	4	3	7	13	12		Minuend
–	2	1	4	5	8		Subtrahend
			1	1			Übertrag
	2	**2**	**2**	**7**	**4**		**Ergebnis**

Bei der **mehrfachen Subtraktion** werden die **Subtrahenden zunächst addiert** und dann gemeinsam subtrahiert:

Aufgabe:	3792 – 1267 – 278
Überschlag:	3800 – 1300 – 300 = **2200**

	T	H	Z	E		
	3	7	19	22		Minuend
–	1	2	6	7		Subtrahend
–		2	7	8		Subtrahend
		1	2			Übertrag
	2	**2**	**4**	**7**		**Ergebnis**

Aufgabe:	43 732 – 21 458 – 6543
Überschlag:	44 000 – 21 000 – 7000 = **16 000**

	ZT	T	H	Z	E		
	4	13	17	13	12		Minuend
–	2	1	4	5	8		Subtrahend
–		6	5	4	3		Subtrahend
	1	1	1	1			Übertrag
	1	**5**	**7**	**3**	**1**		**Ergebnis**

Übungen: Aufgaben zur schriftlichen Subtraktion Nr. 1 - 4

0.2.7 Schriftliche Multiplikation

Man zerlegt den 2. Faktor in **Zehnerpotenzen** und multipliziert diese **einzeln** mit dem 1. Faktor:

Aufgabe: 628 · 34										**Aufgabe:** 542 · 239									
Überschlag: 600 · 30 = **18 000**										**Überschlag:** 500 · 200 = **100 000**									

Links:

		6	2	6	·	3	4
6	2	8	·	3	0	=	1	8	8	4	0
6	2	8	·		4	=		2	5	1	2
							1	1			
						2	**1**	**3**	**5**	**2**

Rechts:

			5	4	2	·	2	3	9
5	4	2	·	2	0	0	=	1	0	8	4	0	0
5	4	2	·		3	0	=		1	6	2	6	0
5	4	2	·			9	=			4	8	7	8
									1	1			
							1	**2**	**9**	**5**	**3**	**8**

Übungen: Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation Nr. 1 - 5

0.2.8 Schriftliche Division

Man zerlegt den Dividenden in **Zehnerpotenzen** und dividiert diese **einzeln mit Rest** durch den Divisor. Der Rest wird zur folgenden Zehnerpotenz hinzugefügt und ein weiteres Mal dividiert.

Aufgabe: 537 : 6		**Aufgabe:** 5967 : 19
Überschlag: 540 : 6 = **90**		**Überschlag:** 6000 : 20 = **300**

Links:

H	Z	E			Z	E	
5	3	7	:	6	=	8	9	R	3
−	4	8	0	←	·6		
R	5	7					
−		5	4	←	·6		
	R	3					

Rechts:

T	H	Z	E				H	Z	E	
5	9	6	7	:	1	9	=	3	1	4	R	1
−	5	7	0	0	←	·19			
R	2	6	7						
−	1	9	0	←	·19				
	R	7	7						
	−	7	6	←	·19				
		R	1						

Übungen: Aufgaben zur schriftlichen Division Nr. 1 - 5

0.2.9 Rechenregeln

Potenz geht vor Punktrechnung (· und :) geht vor Strichrechnung (+ und –): 4 + 2·3 = 4 + 6 = 10

a) $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$
$9 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1$

b) $6 + 12 : 3 = 6 + 4 = 10$
$32 - 16 : 8 = 32 - 2 = 30$

c) $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$
$2^3 \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$

Klammern werden zuerst berechnet: 3·(4 + 2) = 3·6 = 18

a) $(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 2 = 20$
$(9 - 2) \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28$

b) $(6 + 12) : 3 = 18 : 3 = 6$
$(32 - 16) : 8 = 16 : 8 = 2$

Distributivgesetz (lat. tribus = Stamm, distribution = Verteilung): 3·(4 + 2) = 3·4 + 3·2 = 12 + 6 = 18

a) $(2 + 3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = 20$
$(9 - 2) \cdot 4 = 9 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 36 - 8 = 28$

b) $(6 + 12) : 3 = 6 : 3 + 12 : 3 = 2 + 4 = 6$
$(32 - 16) : 8 = 32 : 8 - 16 : 8 = 4 - 2 = 2$

Kommutativgesetz (lat. commutare = vertauschen) bei Addition und Multiplikation: 2·3 = 3·2

a) $6 + 2 = 2 + 6$
$6 \cdot 2 = 2 \cdot 6$

b) $6 - 2 = 4$ aber $6 - 2 = ?$
$6 : 2 = 3$ aber $2 : 6 = ?$

Assoziativgesetz (lat. societas = Gemeinschaft) bei Addition und Multiplikation: 2·(3·4) = (2·3)·4

a) $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

$2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4)$

b) $12 - (6 - 2) = 12 - 4 = 8$ aber
$(12 - 6) - 2 = 6 - 2 = 4$
$12 : (6 : 2) = 12 : 3 = 4$ aber
$(12 : 6) : 2 = 2 : 2 = 1$

Übungen: Aufgaben zu Rechenregeln Nr. 1 - 11