1.1. Prüfungsaufgaben zu binomischen Formeln

Aufgabe 1: Binomische Formeln vorwärts
Löse die Klammern auf und fasse anschließend zusammen:

a) $(3a - 4b)(3a + 4b)$
b) $(4c - 5d)(4c + 5d)$
c) $(2m + 3n)(2m - 3n)$
d) $(a + 2b)(a - 2b)$
e) $(a - b)(a^2 - b^2)$
f) $(2a - b)^2 + (a + b)^2 - (2a - b)(2a + b)$
g) $(x - y)^2 + (x + 2y)^2 - (x - 3y)(x + 3y)$
h) $-5\cdot(a + b)^2 + 10ab$
i) $(x + y)^2 - (x - y)^2 - 4xy$
j) $(a + b)^2 - (a - b)^2$
k) $3\cdot(x - 2)\cdot(x + 2)\cdot(x + 3)$
l) $-4\cdot(a + 3)\cdot(a + 1)\cdot(a - 3)$
m) $(3u - 4)^2\cdot(u + 1)$
n) $(4m - 1)^2(3m + 1)$

Lösungen

a) $(3a - 4b)(3a + 4b) = 9a^2 - 16b^2$ (1)
b) $(4c - 5d)(4c + 5d) = 16c^2 - 25d^2$ (1)
c) $(2m + 3n)(2m - 3n) = 4m^2 - 9n^2$ (1)
d) $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$ (3)
e) $(a - b)(a^2 - b^2) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$ (2)
f) $(2a - b)^2 + (a + b)^2 - (2a - b)(2a + b) = a^2 - 2ab + 3b^2$ (1)
g) $(x - y)^2 + (x + 2y)^2 - (x - 3y)(x + 3y) = x^2 + 2xy + 14y^2$ (1)
h) $-5\cdot(a + b)^2 + 10ab = -5a^2 - 10ab - 5b^2 + 10ab = -5a^2 - 5b^2$ (2)
i) $(x + y)^2 - (x - y)^2 - 4xy = 0$ (2)
j) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ (1)
k) $3\cdot(x - 2)\cdot(x + 2)\cdot(x + 3) = (3x^2 - 12)\cdot(x + 3) = 3x^3 + 9x^2 - 12x - 36$ (3)
l) $-4\cdot(a + 3)\cdot(a + 1)\cdot(a - 3) = -4\cdot(a^2 - 9)\cdot(a + 1) = -4\cdot(a^3 + a^2 - 9a - 9) = -4a^3 - 4a^2 + 36a + 36$ (3)
m) $(3u - 4)^2\cdot(u + 1) = (9u^2 - 24u + 16)\cdot(u + 1) = 9u^3 - 15u^2 - 8u + 16$ (3)
n) $(4m - 1)^2(3m + 1) = (16m^2 - 8m + 1)\cdot(3m + 1) = 48m^3 - 8m^2 - 5m + 1$ (3)

Aufgabe 2: 1. Binomische Formel rückwärts
Zerlege in Faktoren:

a) $\frac{1}{4}a^2 + ab + b^2$
b) $\frac{1}{2}ab^2 + 4ab + 8a$
c) $2mn^2 + 2mn + \frac{1}{2}m$
d) $\frac{1}{8}x^2 + 2x + 8$
e) $\frac{1}{9}x^4 + 2x^3 + 9x^2$
f) $9p^2 + 6p + 1$
g) $3x^2 + 12x + 12$
h) $3x^2 + 6x + 3$
i) $4m^2 + 8m + 4$
j) $7m^2 + 28m + 28$
k) $12z^3 + 36z^2 + 27z$

Lösungen

a) $\frac{1}{4}a^2 + ab + b^2 = \frac{1}{4}(a + 2b)^2$ (2)
b) $\frac{1}{2}ab^2 + 4ab + 8a = \frac{1}{2}a(b + 4)^2$ (2)
c) $2mn^2 + 2mn + \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m(2n + 1)^2$ (2)
d) $\frac{1}{8}x^2 + 2x + 8 = \frac{1}{8}(x + 8)^2$ (2)
e) $\frac{1}{9}x^4 + 2x^3 + 9x^2 = \frac{1}{9}x^2(x + 9)^2$ (2)
f) $9p^2 + 6p + 1 = (3p + 1)^2$ (2)
g) $3x^2 + 12x + 12 = 3(x + 2)^2$ (2)
h) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2$ (2)
i) $4m^2 + 8m + 4 = 4(m + 1)^2$ (2)
j) $7m^2 + 28m + 28 = 7(m + 2)^2$ (2)
k) $12z^3 + 36z^2 + 27z = 3z(2z+ 3)^2$ (2)

Aufgabe 3: 2. Binomische Formel rückwärts
Zerlege in Faktoren:

a)	$\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x$	e)	$36w^2 - 24w + 4$	i)	$\frac{1}{4}a - 2a^2 + 4a^3$
b)	$3xy^2 - 2xy + \frac{1}{3}x$	f)	$36c^2 - 12c + 1$	j)	$\frac{1}{2} - a + \frac{1}{2}a^2$
c)	$a^2b - 2ab^2 + b^3$	g)	$81a - 54a^2 + 9a^3$	k)	$\frac{1}{x^2} - \frac{14}{x} + 49$
d)	$24c^2 - 24c + 6$	h)	$\frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$		

Lösungen

a) $\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x = \frac{2}{3}x(x - 3)^2$ (2)

b) $3xy^2 - 2xy + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x(3y - 1)^2$ (2)

c) $a^2b - 2ab^2 + b^3 = b(a - b)^2$ (2)

d) $24c^2 - 24c + 6 = 6(2c - 1)^2$ (2)

e) $36w^2 - 24w + 4 = 4(3w - 1)^2$ (2)

f) $36c^2 - 12c + 1 = (6c - 1)^2$ (2)

g) $81a - 54a^2 + 9a^3 = 9a(3 - a)^2$ (2)

h) $\frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(n - 1)^2$ (2)

i) $\frac{1}{4}a - 2a^2 + 4a^3 = \frac{1}{4}a(1 - 4a)^2$ (2)

j) $\frac{1}{2} - a + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(1 - a)^2$ (2)

k) $\frac{1}{x^2} - \frac{14}{x} + 49 = (\frac{1}{x} - 7)^2$ (1)

Aufgabe 4: 3. Binomische Formel rückwärts
Zerlege in Faktoren:

a)	$50x^2 - 2y^2$	e)	$\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{32}y^2$	i)	$64x^2 - 144z^2$
b)	$7a^2 - 63b^2$	f)	$\frac{1}{2}x^2 - 18y^2$	j)	$18y^3 - \frac{2}{9}yz^2$
c)	$4b^2 - 25c^2$	g)	$\frac{x^2}{y^2} - 1$	k)	$8y^3 - 18x^2y$
d)	$9a^2 - 16b^2$	h)	$3m^2 - 27n^2$	l)	$\frac{25}{49}b^3 - \frac{49}{25}a^2b$

Lösungen

a) $50x^2 - 2y^2 = 2(5x - y)(5x + y)$ (2)

b) $7a^2 - 63b^2 = 7(a - 3b)(a + 3b)$ (2)

c) $4b^2 - 25c^2 = (2b - 5c)\cdot(2b + 5c)$ (2)

d) $9a^2 - 16b^2 = (3a - 4b)(3a + 4b)$ (2)

e) $\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{32}y^2 = \frac{1}{32}(2x - y)\cdot(2x + y)$ (2)

f) $\frac{1}{2}x^2 - 18y^2 = \frac{1}{2}(x - 6y)(x + 6y)$ (2)

g) $\frac{x^2}{y^2} - 1 = (\frac{x}{y} - 1)(\frac{x}{y} + 1)$ (2)

h) $3m^2 - 27n^2 = 3\,(m - 3n)\cdot(m + 3n)$ (2)

i) $64x^2 - 144z^2 = (8x - 12z)(8x + 12z)$ (1)

j) $18y^3 - \frac{2}{9}yz^2 = 2y(3y + \frac{1}{3}z)(3y - \frac{1}{3}z)$ (2)

k) $8y^3 - 18x^2y = 2y(2y - 3x)(2y + 3x)$ (2)

l) $\frac{25}{49}b^3 - \frac{49}{25}a^2b = b(\frac{5}{7}b + \frac{7}{5}a)(\frac{5}{7}b - \frac{7}{5}a)$ (2)

Aufgabe 5: Satz von Vieta

Zerlege in Faktoren:

a)	$x^2 + 5x + 6$	g)	$a^2 + 3a - 18$	m)	$y^2 - y - 30$	s)	$w^2 + 5w - 24$
b)	$w^2 + 9w + 20$	h)	$x^2 - x - 20$	n)	$a^2 + 4a - 60$	t)	$z^2 - z - 56$
c)	$x^2 + 11x + 24$	i)	$x^2 - x - 12$	o)	$w^2 + 7w - 8$	u)	$n^2 + 8n - 20$
d)	$f^2 + 3f + 2$	j)	$u^2 + u - 12$	p)	$z^2 - 16z - 36$	v)	$z^2 - 8z - 33$
e)	$x^2 + 6x + 8$	k)	$x^2 - 2x - 15$	q)	$x^2 - 11x + 30$	w)	$2x^2 + 10x + 12$
f)	$b^2 + 21b + 110$	l)	$x^2 - x - 42$	r)	$n^2 + 15n - 16$	x)	$\frac{1}{3}a^2 - \frac{7}{3}a + 4$

Lösungen

a) $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$ (1)

b) $w^2 + 9w + 20 = (w + 4)(w + 5)$ (1)

c) $x^2 + 11x + 24 = (x + 3)(x + 8)$ (1)

d) $f^2 + 3f + 2 = (f + 2)(f + 1)$ (1)

e) $x^2 + 6x + 8 = (x + 4)(x + 2)$ (1)

f) $b^2 + 21b + 110 = (b + 10)(b + 11)$ (1)

g) $a^2 + 3a - 18 = (a - 3)(a + 6)$ (1)

h) $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$ (1)

i) $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ (1)

j) $u^2 + u - 12 = (u + 4)(u - 3)$ (1)

k) $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$ (1)

l) $x^2 - x - 42 = (x - 7)(x + 6)$ (1)

m) $y^2 - y - 30 = (y - 6)(y + 5)$ (1)

n) $a^2 + 4a - 60 = (a + 10)(a - 6)$ (1)

o) $w^2 + 7w - 8 = (w + 8)(w - 1)$ (1)

p) $z^2 - 16z - 36 = (z - 18)(z + 2)$ (1)

q) $x^2 - 11x + 30 = (x - 6)(x - 5)$ (2)

r) $n^2 + 15n - 16 = (n + 16)(n - 1)$ (1)

s) $w^2 + 5w - 24 = (w + 8)(w - 3)$ (1)

t) $z^2 - z - 56 = (z - 8)(z + 7)$ (1)

u) $n^2 + 8n - 20 = (n + 10)(n - 2)$ (1)

v) $z^2 - 8z - 33 = (z - 11)(z + 3)$ (1)

w) $2x^2 + 10x + 12 = 2(x + 2)(x + 3)$ (2)

x) $\frac{1}{3}a^2 - \frac{7}{3}a + 4 = \frac{1}{3}(a - 3)(a - 4)$ (2)

Aufgabe 6: Binomische Formeln gemischt
Vereinfache soweit wie möglich durch ausklammern und kürzen:

a) $\frac{a^2-12a+36}{2a-12}$ e) $\frac{-3a-9}{a^2+6a+9}$ i) $\frac{4y^2-z^2}{4y^2-4yz+z^2}$ m) $\frac{2a-4}{a^2-1}:\frac{(a-2)\cdot(a+2)}{a^2+3a+2}$

b) $\frac{x^2-12x+36}{2x-12}$ f) $\frac{4d-12}{-d^2+6d-9}$ j) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}$ n) $\frac{2a+6}{a^2-9}:\frac{a^2+6a+9}{(a-3)\cdot(a+3)}$

c) $\frac{x^2-10x+25}{-3x+15}$ g) $\frac{b^2-9c^2}{b^2+6bc+9c^2}$ k) $\frac{x^2+7x+12}{x^2+8x+16}$

d) $\frac{-3x-9}{x^2+6x+9}$ h) $\frac{y^2-9z^2}{y^2+6yz+9z^2}$ l) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+3x-18}$

Lösungen

a) $\frac{a^2-12a+36}{2a-12} = \frac{(a-6)^2}{2(a-6)} = \frac{1}{2}(a-6)$ (3)

b) $\frac{x^2-12x+36}{2x-12} = \frac{(x-6)^2}{2(x-6)} = \frac{1}{2}(x-6)$ (3)

c) $\frac{x^2-10x+25}{-3x+15} = \frac{(x-5)^2}{-3(x-5)} = -\frac{1}{3}(x-5)$ (3)

d) $\frac{-3x-9}{x^2+6x+9} = \frac{-3(x+3)}{(x+3)^2} = -\frac{3}{x+3}$ (3)

e) $\frac{-3a-9}{a^2+6a+9} = \frac{-3(a+3)}{(a+3)^2} = -\frac{3}{a+3}$ (3)

f) $\frac{4d-12}{-d^2+6d-9} = \frac{4(d-3)}{-(d-3)^2} = -\frac{4}{d-3}$ (3)

g) $\frac{b^2-9c^2}{b^2+6bc+9c^2} = \frac{(b-3c)(b+3c)}{(b+3c)^2} = \frac{b-3c}{b+3c}$ (3)

h) $\frac{y^2-9z^2}{y^2+6yz+9z^2} = \frac{(y-3z)(y+3z)}{(y+3z)^2} = \frac{y-3z}{y+3z}$ (3)

i) $\frac{4y^2-z^2}{4y^2-4yz+z^2} = \frac{(2y-z)(2y+z)}{(2y-z)^2} = \frac{2y+z}{2y-z}$ (3)

j) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4} = \frac{(x+1)^2}{(x+4)(x+1)} = \frac{x+1}{x+4}$ (3)

k) $\frac{x^2+7x+12}{x^2+8x+16} = \frac{(x+3)(x+4)}{(x+4)^2} = \frac{x+3}{x+4}$ (3)

l) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+3x-18} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+6)} = \frac{x-3}{x+6}$ (3)

m) $\frac{2a-4}{a^2-1}:\frac{(a-2)\cdot(a+2)}{a^2+3a+2} = \frac{2a-4}{a^2-1}\cdot\frac{a^2+3a+2}{(a-2)\cdot(a+2)} = \frac{2(a-2)}{(a-1)(a+1)}\cdot\frac{(a+1)(a+2)}{(a-2)\cdot(a+2)} = \frac{2}{a-1}$ (3)

n) $\frac{2a+6}{a^2-9}:\frac{a^2+6a+9}{(a-3)\cdot(a+3)} = \frac{2a+6}{a^2-9}\cdot\frac{(a-3)\cdot(a+3)}{a^2+6a+9} = \frac{2(a+3)}{(a-3)(a+3)}\cdot\frac{(a-3)\cdot(a+3)}{(a+3)^2} = \frac{2}{a+3}$ (3)

Aufgabe 7: Kürzen von Bruchtermen
Vereinfache soweit wie möglich durch ausklammern und kürzen:

a) $\frac{4x-2}{4x^2-1}$

b) $\frac{x^3+2x^2+x}{xz+z}$

c) $\frac{10m-5}{8m^2-8m+2}$

d) $\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-2x+1}$

e) $\frac{x^2-7x+12}{2x^2-x-15}$

f) $\frac{y^4-1}{y^4+6y^2+5}$

g) $\frac{u^2-v^2+4u+4v}{u^2-v^2}$

h) $\frac{x^2+12x+36}{15x^2+88x-12}$

i) $\frac{z^2-13z+42}{14-2z}$

j) $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$

Lösungen:

a) $\frac{2}{2x+1}$

b) $\frac{x(x+1)}{z}$

c) $\frac{5}{2(2m-1)}$

d) $(x+1)^2$

e) $\frac{x-4}{2x+5}$

f) $\frac{(y-1)(y+1)}{y^2+5}$

g) $\frac{u-v+4}{u-v}$

h) $\frac{x+6}{15x-2}$

i) $\frac{6-z}{2}$

j) $\frac{x-y}{x+y}$