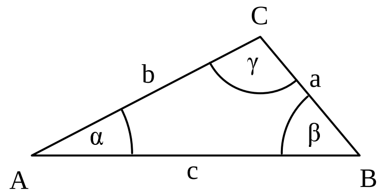
2.2. Figuren

Figuren sind zweidimensionale Gebilde in der Ebene. Die einfachsten Figuren sind **Dreiecke** und **Vierecke.**

2.2.1. Dreiecke

Bezeichnungen
in Dreiecken werden die Eckpunkte A, B, C sowie die dazugehörigen Innenwinkel α, β, γ und die zugeordneten **gegenüberliegenden** Seiten a, b, c **gegen den Uhrzeigersinn** abgezählt. Dabei liegen jeweils der **kleinste Winkel der kürzesten Seite gegenüber und der größte Winkel der längsten Seite gegenüber.**

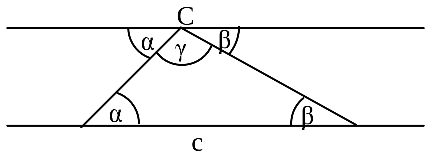


Übungen: Aufgaben zu Figuren Nr. 1

2.2.2. Winkelsumme in Dreiecken

Aufgaben zu Figuren Nr. 2

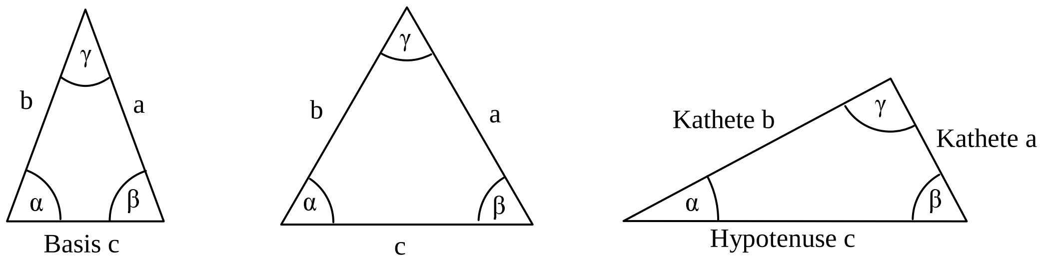
Satz:
In einem Dreieck ist die Summe aller Innenwinkel 180°:
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Beweis:
Die Winkel α und β erscheinen ein zweites Mal als Scheitelwinkel zur Parallelen der Seite c durch den Punkt C. Offensichtlich ist $\alpha + \beta + \gamma = 180°$



2.2.3. Besondere Dreiecke

Aufgaben zu Figuren Nr. 3

1. In einem **gleichschenkligen** Dreieck sind zwei Seiten gleich lang und die beiden Basiswinkel gleich groß.
2. In einem **gleichseitigen** Dreieck sind alle Seiten gleich lang und alle Winkel 60° groß.
3. In einem **rechtwinkligen** Dreieck heißen die dem rechten Winkel γ = 90° gegenüberliegende Seite c **Hypotenuse** und die beiden anliegenden Seiten a und b **Katheten**:



gleichschenklig
$a = b$
$\alpha = \beta$

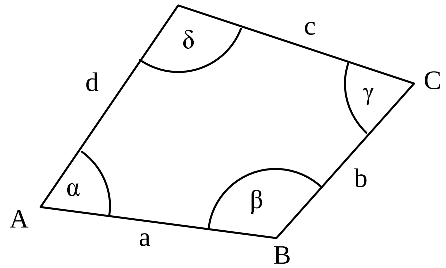
gleichseitig
$a = b = c$
$\alpha = \beta = \gamma = 60°$

rechtwinklig
?
$\gamma = 90°$

Übungen: Aufgaben zu Figuren Nr. 4

2.2.4. Vierecke

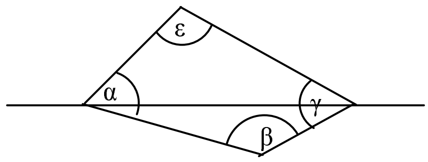
Bezeichnungen
In einem Viereck werden die Eckpunkte A, B, C, D sowie die Innenwinkel α, β, γ, δ und die zugeordneten **anliegenden** Seiten a, b, c, d **gegen den Uhrzeigersinn** abgezählt. Die **Diagonalen** e und f verbinden gegenüber liegende Eckpunkte.



Aufgaben zu Figuren Nr. 5

2.2.5. Winkelsumme in Vierecken

Aufgaben zu Figuren Nr. 6

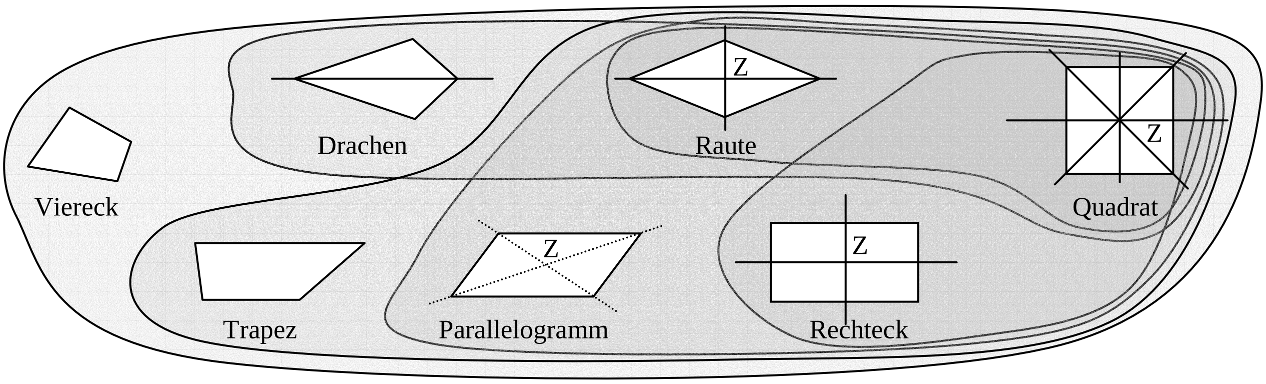


Satz:
In einem Viereck ist die Summe aller Innenwinkel 360°:
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
Beweis:
Durch Zerlegung in zwei Dreiecke mit den Innenwinkeln α_1, γ_1, ε und α_2, β, γ_2, deren Summe jeweils 180° ist, ergibt sich:
$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = \alpha_1 + \gamma_1 + \varepsilon + \alpha_2 + \beta + \gamma_2 = 180° + 180° = 360°$.

2.2.6. Besondere Vierecke

Aufgaben zu Figuren Nr. 7

1. In einem **Trapez** sind zwei gegenüberliegende Seiten parallel.
2. In einem **Parallelogramm** sind jeweils zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang. Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.
3. Ein **Rechteck** ist ein rechtwinkliges Parallelogramm
4. In einem **Drachen** sind zwei Paare benachbarter Seiten gleich lang. Eine Diagonale halbiert die andere Diagonale im rechten Winkel.
5. In einer **Raute** sind jeweils zwei gegenüberliegende Seiten parallel und alle Seiten gleich lang. Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig im rechten Winkel.
6. Ein **Quadrat** ist eine rechtwinklige Raute.

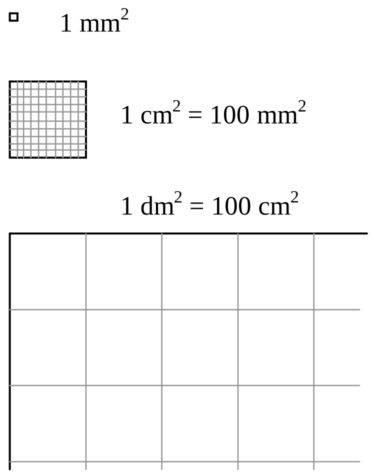


Übungen: Aufgaben zu Figuren Nr. 8

2.2.7. Flächeneinheiten

Flächen werden in Quadraten gemessen, wobei ein Quadrat mit der Kantenlänge 1 m die Einheit Quadratmeter = 1 m^2 erhält. Verzehnfacht man die Kantenlänge, so verhundertfacht sich die Fläche:

	Kantenlänge		**Flächeneinheit**
	1 mm		1 mm^2 (Quadratmillimeter)
·10		·100	
	1 cm		1 cm^2 (Quadratzentimeter)
·10		·100	
	1 dm		1 dm^2 (Quadratdezimeter)
·10		·100	
	1 m		1 m^2 (Quadratmeter)
·10		·100	
	10 m		1 a (Ar von engl. area = Fläche)
·10		·100	
	100 m		1 ha (Hektar von griech. hekto = 100)
·10		·100	
	1 km		1 km^2 (Quadratkilometer)



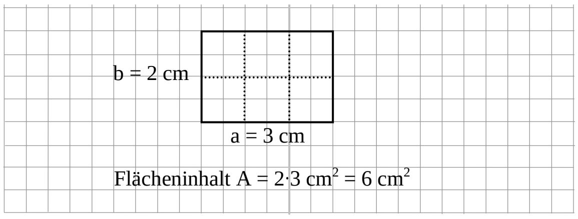
Beispiele:
$4\ m^2 = 400\ dm^2$, $2\ km^2 = 200$ ha und $25\ mm^2 = 0{,}25\ cm^2$

Übungen: Aufgaben zu Figuren Nr. 9 - 11

2.2.8. Flächeninhalt eines Rechtecks

Aufgaben zu Figuren Nr. 12

Satz:
Ein Rechteck mit Breite a und der Höhe b hat den **Flächeninhalt** $A = a \cdot b$.
In Worten: **Fläche = Breite mal Höhe**
Beweis:
Das Rechteck lässt sich mit b Reihen von jeweils a Quadraten mit dem Flächeninhalt 1 LE^2 überdecken. Die $a \cdot b$ Quadrate haben den Flächeninhalt $A = a \cdot b\ LE^2$.



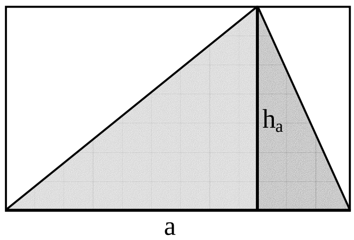
Beispiel:
Welchen Flächeninhalt hat ein 2 km breiter und 600 m langer Acker?
Lösung:
Breite und Länge müssen erst in die gleiche Längeneinheit umgerechnet werden:
Der Flächeninhalt ist $A = 2000\ m \cdot 600\ m = 1\,200\,000\ m^2 = 12\,000\ a = 120\ Ha = 1{,}2\ km^2$.

Übungen: Aufgaben zu Figuren Nr. 13 und 14

2.2.9. Flächeninhalt eines Dreiecks

Aufgaben zu Figuren Nr. 15

Satz:
Ein Dreieck mit der Grundseite a und der Höhe h_a auf a hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}\ a \cdot h_a$.
In Worten: **Fläche = Einhalb Breite mal Höhe**
Beweis:
Das Dreieck lässt sich durch Verdoppeln der beiden Teildreiecke rechts und links von der Höhe h_a zu einem Rechteck mit dem Flächeninhalt $A = a \cdot h_a$ ergänzen.

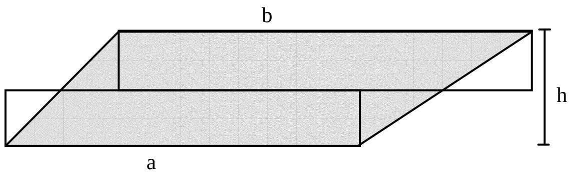


Übungen: Aufgaben zu Figuren Nr. 16

2.2.10. Flächeninhalt eines Trapezes

Aufgaben zu Figuren Nr. 17

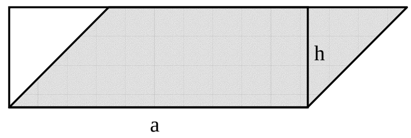
Satz:
Ein Trapez mit den Längen a und b der parallelen Seiten sowie der Höhe h hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$
Beweis:
Am Rand des Trapezes sind jeweils das weiße und das graue Dreieck deckungsgleich, da sie z.B. in der Höhe $\frac{1}{2}h$, dem rechten Winkel und dem Scheitelwinkel übereinstimmen. Wenn man die beiden grauen Dreiecke auf die weißen Dreiecke legt, erhält man zwei Rechtecke mit dem Flächeninhalt
$A = a \cdot \frac{1}{2}h + b \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$.



2.2.11. Flächeninhalt eines Parallelogramms

Aufgaben zu Figuren Nr. 18 a)

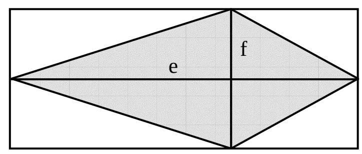
Satz:
Ein Parallelogramm mit der Seitenlänge a und der Höhe h_a auf a hat den Flächeninhalt $A = a \cdot h_a$.
Beweis:
Am Rand des Parallelogramms sind das weiße und das graue Dreieck deckungsgleich, da sie z.B. in der Höhe h, dem rechten Winkel und dem Stufenwinkel übereinstimmen Wenn man das graue Dreieck auf das weiße Dreieck legt, erhält man eine Rechteck mit dem Flächeninhalt $A = a \cdot h$.



2.2.12. Flächeninhalt eines Drachens

Aufgaben zu Figuren Nr. 18 b)

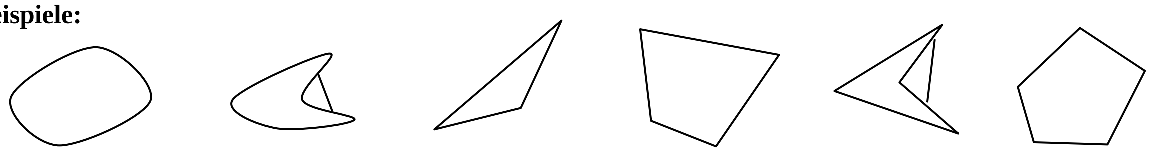
Satz:
Ein Drachen mit den Diagonalen e und f hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} e \cdot f$.
Beweis:
Am Rand des Drachens sind jeweils das weiße und das graue Dreieck deckungsgleich, da sie z.B. in der Höhe $\frac{1}{2}f$, dem rechten Winkel und dem Wechsel übereinstimmen Wenn man die unteren Dreiecke auf die oberen weißen Dreiecke legt, erhält man ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} e \cdot f$.



2.2.13. Konvexe Polygone

1. Eine Figur heißt **konvex** (griech. **bauchig**), wenn die Strecke zwischen zwei beliebigen Randpunkten immer innerhalb der Figur liegt.
2. Eine Figur heißt **konkav** (griech. **ausgehöhlt**), wenn es Randpunkte gibt, deren Verbindungsstrecke außerhalb der Figur liegt.
3. Eine Figur heißt **Polygon** (griech. **Vieleck**), wenn ihre Umrandung aus Strecken zusammengesetzt ist. Die einfachsten Polygone sind **Trigone** (Dreiecke), **Tetragone** (Vierecke), **Pentagone** (Fünfecke) und **Hexagone** (Sechsecke).

Beispiele:



konvexe Figur | konkave Figur | Trigon | Tetragon | konkaves und konvexes Pentagon

Übungen: Aufgaben zu Figuren Nr. 20 und 21

2.2.14. Winkelsummen in konvexen Polyegonen

Aufgaben zu Figuren Nr. 22

Winkelsummensatz:
Die Summe der Innenwinkel in einem konvexen Polygon mit n Ecken ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (n - 2)\cdot 180°$.

Beispiel	**Winkelsumme**
Dreieck	180°
Viereck	360°
Fünfeck	540°

Beweis:
1. Durchwandert man das Polygon einmal vollständig, so hat man sich insgesamt genau einmal um sich selbst gedreht.
2. Wenn man sich an der 1. Ecke um β_1, an der 2. Ecke um β_2, an der 3. Ecke um β_3 usw. nach links gedreht hat, muss die Summe dieser Linksdrehungen also 360° ergeben:
   $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots \beta_n = 360°$.
3. Die Innenwinkel α_1, α_2, α_3, … sind die Nebenwinkel der Winkel β_1, β_2, β_3, …, d.h.,
   $\beta_1 = 180° - \alpha_1$, $\beta_2 = 180° - \alpha_2$ usw.
4. Durch Einsetzen in die Winkelsumme erhält man
   $180° - \alpha_1 + 180° - \alpha_2 + \ldots + 180° - \alpha_n = 360°$.
5. Auf der linken Seite steht nun insgesamt n mal 180°, auf der rechten Seite steht 360° = 2 mal 180°:
   $n\cdot 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 2\cdot 180°$.
6. Zieht man auf beiden Seiten 2 mal 180° ab, so ergibt sich
   $(n - 2)\cdot 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) = 0$ bzw.
   $(n - 2)\cdot 180° = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$.