3.1. einstufige Zufallsexperimente

3.1.1. Ergebnis und Wahrscheinlichkeit

Beispiele:
Glücksrad: *Gummibärchen bei rot, gelb oder bei Zahl durch 5 teilbar?*
Kartenspiel: *Gummibärchen bei Bube, Dame oder Kreuz?*
Urne *Gummibärchen bei rot, gelb oder blau?*
Wie groß sind jeweils die Gewinnchancen?
In welchem Verhältnis sollten die Gewinnwahrscheinlichkeiten zum Gewinn stehen?

Zufallsexperiment, Ergebnis und Ereignis
Bei einem **Zufallsexperiment** muss zunächst die **Ergebnismenge** S = {e_1, e_2, ...} festgelegt werden.
- Die **Ergebnisse** e_1, e_2, ..
- **müssen sich gegenseitig ausschließen (Eindeutigkeit)**
- **dürfen nicht vorhersehbar sein (Zufallsprinzip)**
- Fasst man mehrere Ergebnisse e_i, e_k, ... zusammen, so spricht man von einem **Ereignis** E = {e_i, e_k, ...}

Übungen: Aufgaben zur einstufigen Zufallsexperimenten Nr. 1

Wahrscheinlichkeitsverteilung:
1. Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** ist eine Funktion P, die jedem Ergebnis e_1, e_2, ... eine reelle Zahl $P(e_1)$, $P(e_2)$, ... zwischen 0 und 1 zuordnet. Ihre Funktionswerte $P(e_1)$, $P(e_2)$, ... heißen **Wahrscheinlichkeiten**.
2. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** E = {e_i, e_k, ...} ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu A führen: $P(E) = P(e_i) + P(e_k) + ...$ (**elementare Summenregel**)
3. Die Summe **aller** Wahrscheinlichkeiten muß 1 sein: $P(S) = P(e_1) + P(e_2) + ... = 1$.

Übungen: Aufgaben zur einstufigen Zufallsexperimenten Nr. 2 - 4

3.1.2. Laplace-Experimente

Satz über Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten
Bei einem **Laplace-Experiment** treten alle n **möglichen** Ergebnisse e_1, ..., e_n, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $P(e_1) = ... = P(e_n) = p$ auf. Wegen $P(e_1) + ... + P(e_n) = n \cdot p = 1$ ist dann $p = \frac{1}{n}$.

In Worten: $$\textbf{P(Ergebnis)} = \frac{\textbf{1}}{\textbf{Zahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Für eine Ereignis E = {e_1, ..., e_m} ist nach der Summenregel $P(E) = P(e_1) + ... + P(e_m) = m \cdot p = \frac{m}{n}$.

In Worten: $$\textbf{P(Ereignis)} = \frac{\textbf{Zahl der günstigen Ergebnisse}}{\textbf{Zahl der möglichen Ergebnisse}}$$

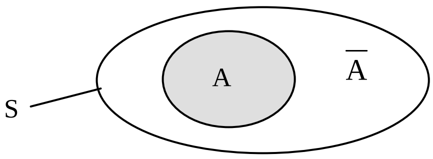
Übungen: Aufgaben zur einstufigen Zufallsexperimenten Nr. 5 - 7

3.1.3. Summenregel und Gegenereignis

Beispiel: Aufgaben zur einstufigen Zufallsexperimenten Nr. 8

Gegenereignisse
Das Ereignis $\overline{A}$ = „nicht A“ nennt man **Gegenereignis** zu A
Wegen $P(A) + P(\overline{A}) = P(A \text{ oder nicht } A) = 1$ gilt

$$\mathbf{P(A) = 1 - P(\overline{A})}$$



Dieser Zusammenhang läßt sich ausnutzen, wenn $P(\overline{A})$ leichter zu berechnen ist als P(A).

Die allgemeine Summenregel

$P(A \text{ und } B) = P(A \cap B)$ (**Schnittmenge)**

$P(A \text{ oder } B) = P(A \cup B)$ (**Vereinigungsmenge**)

Zusammenhang:

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \qquad | - P(A \cap B)$$

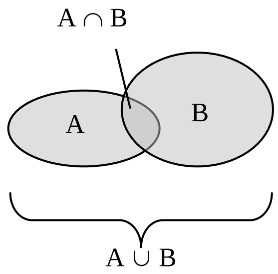
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sonderfall:

Schließen sich A und B gegenseitig aus (A und B sind **disjunkt**), so ist $A \cap B = \{\ \}$ und

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



Übungen: Aufgaben zur einstufigen Zufallsexperimenten Nr. 9 - 12

3.1.4. Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Beispiel. Aufgaben zur einstufigen Zufallsexperimenten Nr. 13

Definition
Eine **Zufallsvariable** ist eine Funktion, die jedem Ergebnis e_1, e_2, ... eine reelle Zahl $X(e_1)$, $X(e_2)$, .. zuordnet.

Übungen: Aufgaben zur einstufigen Zufallsexperimenten Nr. 14 und 15

Definition:
Der **Erwartungswert** $E(X)$ einer Zufallsvariablen X ist der mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $P(e_i)$ gewichtete Mittelwert aller möglichen Werte $X(e_i)$: $E(X) = X(e_1) \cdot P(e_1) + X(e_2) \cdot P(e_2) + \ldots$

Übungen: Aufgaben zur einstufigen Zufallsexperimenten Nr. 16 - 18

3.1.5. Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten

Beispiel: Aufgaben zur einstufigen Zufallsexperimenten Nr. 19

Definition:
Wenn bei n Zufallsexperimenten n_e mal das Ergebnis e aufgetreten ist, so heißt n_e die **absolute Häufigkeit** und $\frac{n_e}{n}$ die **relative Häufigkeit** des Eintretens von e.

Ergebnis der Legostatistik

$$P(o) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_o}{n} \approx \frac{383}{1000} = 38{,}3\ \%$$

$$P(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_u}{n} \approx \frac{412}{1000} = 41{,}2\ \%$$

$$P(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_s}{n} \approx \frac{205}{1000} = 20{,}5\ \%$$

Satz: Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten in einer Statistik
Für eine Statistik werden n Zufallsexperimente unter gleichen Bedingungen und unabhängig voneinander durchgeführt. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Experimente gleichzeitig oder hintereinander ausgeführt werden, solange sie sich nicht gegenseitig beeinflussen. Dann strebt die relative Häufigkeit $\frac{n_e}{n}$ für das Ergebnis e mit steigender Anzahl n der Zufallsexperimente gegen die Wahrscheinlichkeit P(e): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_e}{n} = P(e)$.

Beweis benötigt Hilfsmittel aus der Maßtheorie. (Starkes Gesetz der großen Zahlen)

Bei der Legostatistik galt für die Summen der Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten:

absolute Häufigkeiten:	$n_o + n_u + n_s = n$	$\mid : n$
relative Häufigkeiten:	$\frac{n_o}{n} + \frac{n_u}{n} + \frac{n_s}{n} = 1$	$\mid n \to \infty$
Wahrscheinlichkeiten:	$P(o) + P(u) + P(s) = 1$	

Begründung der elementaren Summenregel durch relative Häufigkeiten
Bestimmt man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A = $\{e_1$ oder $e_2\}$ mit einer Statistik, so zählen sowohl die Fälle, in denen s_1 eingetreten ist, als auch die Fälle, in denen s_2 eingetreten ist, d.h. $n_{e1 \text{ oder } e2} = n_{e1} + n_{e2}$ und nach dem Gesetz der großen Zahlen erhält man

$$P(s_1 \text{ oder } s_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{s1 \text{ oder } s2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{s1} + n_{s2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_{s1}}{n} + \frac{n_{s2}}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{s1}}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n_{s2}}{n} = P(e_1) + P(e_2).$$