3.3. Aufgaben zur Normalverteilung und Hypothesentests

Aufgabe 1: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

a) Die Zufallsvariable X sei $B_{200,\,0,05}(k)$-verteilt. Skizziere das Histogramm von X mit Hilfe des GTR in das untenstehende Koordinatensystem.

b) Berechne **Erwartungswert** μ und die **Standardabweichung** σ für X.

c) Skizziere mit Hilfe des GTR das Schaubild der **Normalverteilung** $\Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}k^2}$ für $k \in [0; 200]$ ebenfalls in das untenstehende Koordinatensystem.

d) Skizziere die Schaubilder von $\Phi(k-\mu)$, $\Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$ und $\frac{1}{\sigma}\Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$ ebenfalls in das untenstehende Koordinatensystem.

e) Gib bei den drei Funktionen aus d) an, durch welche Verschiebungen bzw. Streckungen in x- oder y-Richtung ihre Schaubilder aus der Normalverteilung entstanden sind.

Aufgabe 2: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Eine Maschine stellt Transistoren her, von denen durchschnittlich 5 % fehlerhaft sind. Pro Tag werden 200 Transistoren geprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind

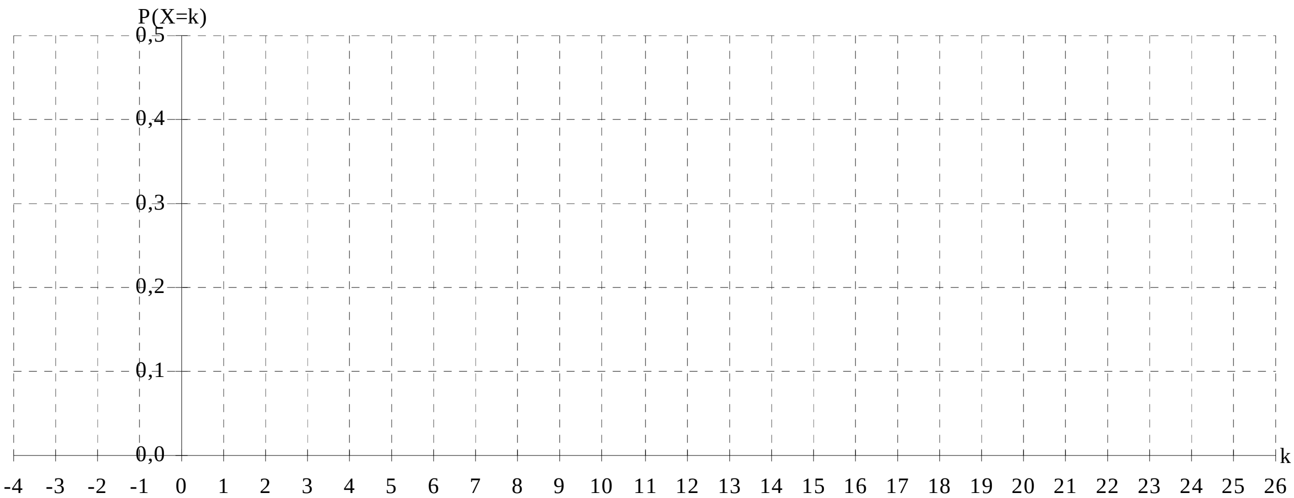
a) weniger als 5

b) mehr als 15

c) nicht weniger als 5 und nicht mehr als 15 geprüfte Transistoren defekt?

Berechne die Wahrscheinlichkeiten sowohl mit der Binomialverteilung als auch mit der Normalverteilung.

Zeichne die Wahrscheinlichkeit aus c) als Flächen in die Schaubilder von $B_{200,\,0,05}(k)$ und $\frac{1}{\sigma}\Phi(\frac{k-\mu}{\sigma})$ ein.



Aufgabe 3: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Normalverteilung:

a) $B_{200\;0,3}(X \geq 70)$

b) $B_{500\;0,2}(X \leq 95)$

c) $B_{1000\;0,4}(390 \leq X \leq 410)$

d) $B_{2000\;0,3}(X \geq 650)$

e) $B_{5000\;0,05}(X \leq 200)$

f) $B_{800\;0,6}(475 \leq X \leq 485)$

g) $B_{10\,000\;0,03}(X \leq 290)$

h) $B_{20\,000\;0,05}(X \geq 110)$

i) $B_{20\,000\;0,3}(5050 \leq X \leq 6050)$

Aufgabe 4: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung
Eine Fertigungsmaschine produziert 10 % Ausschuss.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Charge von 1000 Stück nicht mehr als 100 Stück Ausschuss?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Ausschußrate einer Charge von 1000 Stück um nicht mehr als die Standardabweichung vom Erwartungswert ab?

Aufgabe 5: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung
Eine Grippeepidemie wird nach Einschätzung der Statistiker bei 8 % der Bevölkerung eine ärztliche Behandlung notwendig werden lassen. Ein Großhandel möcht für die Apotheken einer Kreisstadt mit 20 000 Einwohnern Behandlungsmaterialien im voraus bestellen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden maximal 1700 Patienten anfallen ?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 1500 Patienten anfallen ?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der Patienten um nicht mehr als die Standardabweichung vom Erwartungswert ab?

Aufgabe 6: Hypothesentest mit Fehler 1. und 2. Art
Die bisherigen Mittel zur Blutdrucksenkung wirken nur in 60 % aller Fälle; das neue Medikament der Firma Starhealth soll dagegen bei 80 % der Patienten helfen. Um diese Hypothese zu überprüfen, wird das Mittel an 20 Patienten getestet.
a) Zeichne die Stabdiagramme für die **Hypothese** (80 % Wirksamkeit) und die **Gegenhypothese** (60 % Wirksamkeit wie bisher) in ein gemeinsames Koordinatensystem.
b) Die **Hypothese** soll angenommen werden, wenn **mindestens k** Patienten Besserung verspüren. Dabei soll die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass die Hypothese stimmt, aber trotzdem abgelehnt wird (**Risiko 1. Art**) kleiner als 5 % sein. Wo muss die Entscheidungsgrenze k dann liegen?
c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass die Gegenhypothese stimmt, aber trotzdem abgelehnt wird (**Risiko 2. Art**)
d) Betrachte nun umgekehrt den Fall **60 % iger Wirksamkeit als Hypothese**. Diese Hypothese wird angenommen, wenn **höchstns k** Patienten Besserung verspüren. Setze k wieder so fest, dass das Risiko 1. Art kleiner als 5 % ist und berechne das entsprechende Risiko 2. Art

Aufgabe 7: Hypothesentest mit Fehler 1. und 2. Art
Bei Kreuzungsversuchen mit Pflanzen tritt die Blütenfarbe weiß entweder rezessiv (p = 25 %) oder dominant (p = 75 %) auf. Wenn weniger als die Hälfte von 50 Pflanzen weiß blühen, geht man von rezessiver Vererbung aus. Umgekehrt schließt man bei mehr als 50 % auf dominante Vererbung. Bestimme das Risiko 1. und 2. Art.

Aufgabe 8: Hypothesentest mit Fehler 1. und 2. Art
Saatgut für Erbsen wird in zwei Güteklassen mit unterschiedlicher Keimgarantie angeboten: Von den Erbsen 1. Wahl keimen 90 % und von denen 2. Wahl nur 75 %. Ein Großhändler erhält Erbsen-Saatgut, von dem er allerdings nicht weiß, ob es sich um Saatgut 1. oder 2. Wahl handelt. Er will dies mithilfe von 100 zufällig entnommenen Erbsen testen.
Bestimmen Sie für **beide mögliche Hypothesen** eine Entscheidungsregel für $\alpha \leq 5$ % und geben sie jeweils das entsprechende Risiko 2. Art an.

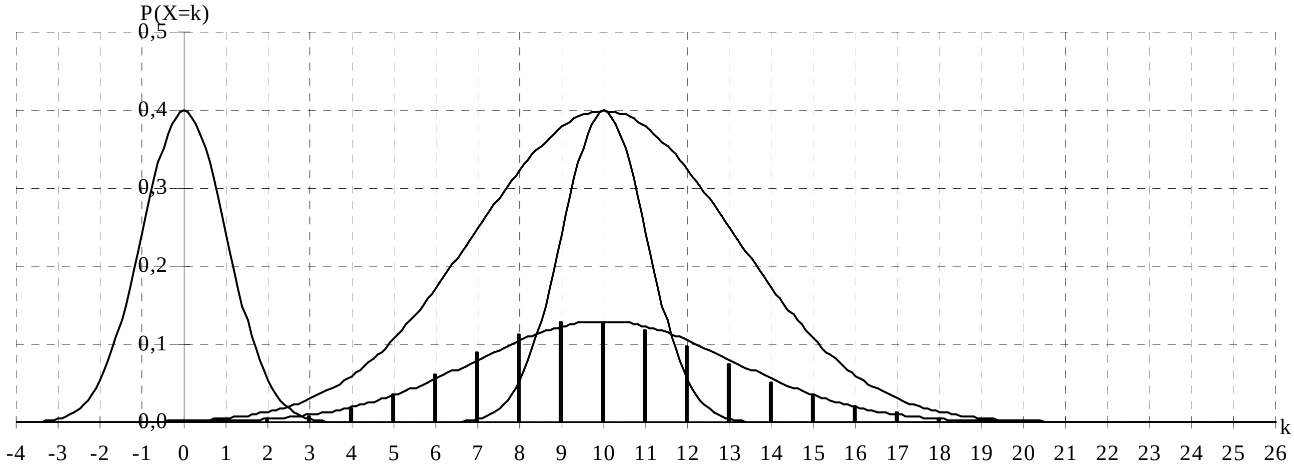
Aufgabe 9: Hypothesentest mit Fehler 1. und 2. Art
Der Bekanntheitsgrad eines Schokoriegels unter Jugendlichen beträgt nach Einschätzung der Leitung der Herstellerfirma 50 %, nach Meinung der Werbeabteilung nur 30 %. Durch eine Stichprobe vom Umfang 100 will man herausfinden, ob eine Werbekampagne notwendig ist. Geben Sie Entscheidungsregeln für **beide Hypothesen** an ($\alpha < 10$ %). Bestimmen Sie jeweils β.

Aufgabe 10: Hypothesentest mit Fehler 1. Art
Eine Fertigungsmaschine soll höchstens 10 % Ausschuss produzieren. Gib eine Entscheidungsregel an, wenn diese Behauptung anhand einer Stichprobe von 100 Stück mit einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden soll.

Aufgabe 11: Hypothesen test mit Normalverteilung und Fehler 1. Art
Beim Lotto „6 aus 49“ ist der Verdacht aufgetreten, dass die 13 zu häufig gezogen wird. Deshalb ordnet ein Notar eine Stichprobe mit 4900 einfachen Ziehungen an. Wie oft muss die 13 mindestens erscheinen, damit die Behauptung $p \leq \frac{1}{49}$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % abgelehnt werden kann?

3.3. Lösungen zu den Aufgaben zur Normalverteilung und Hypothesentests

Aufgabe 1: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung



Aufgabe 2: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Mit μ = 10 und V(X) = 9,5 ist

a) $2{,}64\,\% = B_{200\;0{,}05}(X \leq 4) \approx \int_0^{4{,}5} \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \int_0^{4{,}5} \frac{1}{\sqrt{11\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{11}(x-10)^2} dx \approx 0{,}94\,\%$

b) $92{,}92\,\% = B_{200\;0{,}05}(5 \leq X \leq 15) \approx \int_{4{,}5}^{15{,}5} \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \int_{4{,}5}^{15{,}5} \frac{1}{\sqrt{11\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{11}(x-10)^2} dx \approx 98{,}09\,\%$

c) $4{,}31\,\% = B_{200\;0{,}05}(X \geq 16) \approx \int_{15{,}5}^{20} \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \int_{15{,}5}^{20} \frac{1}{\sqrt{11\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{11}(x-10)^2} dx \approx 0{,}95\,\%$

Aufgabe 3: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

a) $B_{200\;0{,}3}(X \geq 70) \approx \int_{69{,}5}^{200} \frac{1}{\sqrt{84\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{84}(x-60)^2} dx \approx 7{,}13\,\%$

b) $B_{500\;0{,}2}(X \leq 95) \approx \int_{0}^{95{,}5} \frac{1}{\sqrt{160\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{160}(x-100)^2} dx \approx 30{,}7\,\%$

c) $B_{1000\;0{,}4}(390 \leq X \leq 410) \approx \int_{389{,}5}^{410{,}5} \frac{1}{\sqrt{480\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{480}(x-400)^2} dx \approx 50{,}21\,\%$

d) $B_{2000\;0{,}3}(X \geq 650) \approx \int_{649{,}5}^{700} \frac{1}{\sqrt{840\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{840}(x-600)^2} dx \approx 7{,}85\,\%$

e) $B_{5000\;0{,}05}(X \leq 200) \approx \int_{150}^{200{,}5} \frac{1}{\sqrt{475\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{475}(x-250)^2} dx \approx 0{,}066\,\%$

f) $B_{800\;0{,}6}(475 \leq X \leq 485) \approx \int_{474{,}5}^{485{,}5} \frac{1}{\sqrt{384\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{384}(x-480)^2} dx \approx 30{,}86\,\%$

g) $B_{10\,000\;0{,}03}(X \leq 290) \approx \int_{250}^{290{,}5} \frac{1}{\sqrt{570\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{570}(x-300)^2} dx \approx 28{,}53\,\%$

h) $B_{20\,000\;0{,}05}(X \geq 110) \approx \int_{109{,}5}^{150} \frac{1}{\sqrt{190\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{190}(x-100)^2} dx \approx 16{,}48\,\%$

i) $B_{20\,000\;0{,}3}(5950 \leq X \leq 6050) \approx \int_{5949{,}5}^{6050{,}5} \frac{1}{\sqrt{8400\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{8400}(x-6000)^2} dx \approx 56{,}41\,\%$

Aufgabe 4: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

a) $B_{6000\;1/6}(X \le 500) \approx \int\limits_{0}^{500} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10000\pi}} \cdot e^{-\frac{6}{10000}(x-1000)^2}\,dx \approx 49{,}9\ \%$

b) $B_{1000\;0{,}1}(\mu + \sigma \le X \le \mu - \sigma) \approx \int\limits_{100-30{,}82}^{100+30{,}82} \frac{1}{\sqrt{1900\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{1900}(x-100)^2}\,dx \approx 68{,}2\ \%$

Aufgabe 5: Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

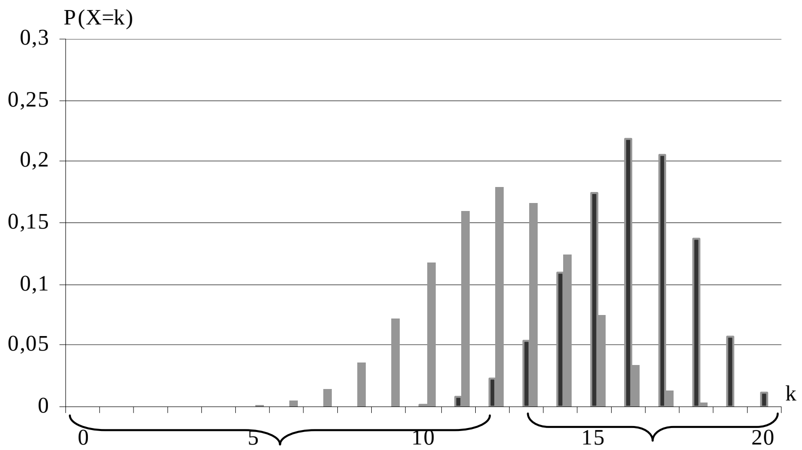
a) $B_{20\,000\;0{,}08}(X \le 1700) \approx \int\limits_{1000}^{1700} \frac{1}{\sqrt{2944\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2944}(x-1600)^2}\,dx \approx 79{,}6\ \%$

b) $B_{20\,000\;0{,}08}(X \ge 1500) \approx \int\limits_{1500}^{2000} \frac{1}{\sqrt{2944\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2944}(x-1600)^2}\,dx \approx 79{,}6\ \%$

c) $B_{20000\;0{,}08}(\mu + \sigma \le X \le \mu - \sigma) \approx \int\limits_{1600-38{,}37}^{1600+38{,}37} \frac{1}{\sqrt{2944\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2944}(x-1600)^2}\,dx \approx 5{,}4\ \%$ (!)

Aufgabe 6: Hypothesentest

a) Stabdiagramme



Annahme p = 0,6 obwohl p = 0,8 $\Rightarrow$ Fehler 1. Art α = 3,2 %

Annahme p = 0,8 obwohl p = 0,6 $\Rightarrow$ Fehler 2. Art β = 41,6 %

b) α = P(Risiko 1. Art) = $B_{20\;0{,}8}(X < k) < 0{,}05 \Rightarrow k = 13$ mit $B_{20\;0{,}8}(X < 13) = B_{20\;0{,}8}(X \le 12) = 0{,}032 \Rightarrow \beta$ = P(Risiko 2. Art) = $B_{20\;0{,}6}(X \ge 13) = 0{,}416 = 41{,}6\ \%$

c) α = P(Risiko 1. Art) = $B_{20\;0{,}6}(X > k) < 0{,}05 \Rightarrow k = 16$ mit $B_{20\;0{,}6}(X > 16) = B_{20\;0{,}6}(X \ge 17) = 0{,}036 \Rightarrow \beta$ = P(Risiko 2. Art) = $B_{20\;0{,}8}(X \le 16) = 0{,}588 = 58{,}8\ \%$

Aufgabe 7: Hypothesentest

α = P(Fehler 1. Art) = $B_{50\;0{,}25}(X \ge 25) = 1 - B_{50;\;0{,}25}(X \le 24) = 0{,}0123\ \% = B_{50\;0{,}75}(X \le 24)$ = P(Fehler 2. Art) = β

Aufgabe 8: Hypothesentest mit Fehler 1. und 2. Art

Hypothese p = 90 % $\Rightarrow \alpha = B_{100\;0{,}9}(X \le k) \le 0{,}05 \Rightarrow$ Wähle k = 84 mit $B_{100\;0{,}9}(X \le 84) = 4{,}0\ \% \Rightarrow$ Annahme der Hypothese bei **mehr** als 84 keimenden Pflanzen $\Rightarrow \beta = B_{100\;0{,}75}(X \ge 85) = 1{,}1\ \%$.

Hypothese p = 75 % $\Rightarrow \alpha = B_{100\;0{,}75}(X \ge k) \le 0{,}05 \Rightarrow$ Wähle k = 83 mit $B_{100\;0{,}75}(X \ge 83) = 3{,}8\ \% \Rightarrow$ Annahme der Hypothese bei **weniger** als 83 keimenden Pflanzen $\Rightarrow \beta = B_{100\;0{,}9}(X \le 82) = 1{,}0\ \%$.

Aufgabe 9: Hypothesentest mit Fehler 1. und 2. Art

Hypothese p = 50 % $\Rightarrow \alpha = B_{100\;0{,}5}(X \le k) \le 0{,}1 \Rightarrow$ Wähle k = 43 mit $B_{100\;0{,}5}(X \le 43) = 9{,}7\ \% \Rightarrow$ Annahme der Hypothese, wenn **mehr** als 43 Personen den Schokoriegel kennen $\Rightarrow \beta = B_{100\;0{,}3}(X \ge 44) = 0{,}2\ \%$.

Hypothese p = 30 % $\Rightarrow \alpha = B_{100\;0{,}3}(X \ge k) \le 0{,}1 \Rightarrow$ Wähle k = 41 mit $B_{100\;0{,}3}(X \ge 41) = 8{,}0\ \% \Rightarrow$ Annahme der Hypothese wenn **weniger** als 41 Personen den Schokoriegel kennen $\Rightarrow \beta = B_{100\;0{,}5}(X \le 40) = 2{,}8\ \%$.

Aufgabe 10: Hypothesentest mit Fehler 1. Art

Hypothese p = 10 % $\Rightarrow$ $\alpha = B_{100\ 0,1}(X \geq k) \leq 0{,}05$ $\Rightarrow$ Wähle k = 16 mit $B_{100\ 0,1}(X \geq 16) = 4{,}0\ \%$ $\Rightarrow$ Annahme der Hypothese, wenn **mehr** als 15 Stück Ausschuss produziert wurden.

Aufgabe 11: Hypothesen test mit Normalverteilung und Fehler 1. Art

Hypothese p = 1/49 $\Rightarrow$ $\alpha = B_{4900\ 1/49}(X \geq 117) \approx \int_{117}^{150} \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \int_{117}^{150} \frac{7}{\sqrt{9600\pi}} \cdot e^{-\frac{49}{9600}(x-100)^2} dx = 4{,}29\ \% \leq$ 5 % $\Rightarrow$ Ablehnung der Hypothese, wenn **mehr** als 117 mal die 13 erscheint.