

4.2. Aufgaben zu quadratischen Funktionen

Aufgabe 1: Streckung und Stauchung

a) Bestimme die Gleichungen der rechts abgebildeten Parabeln:

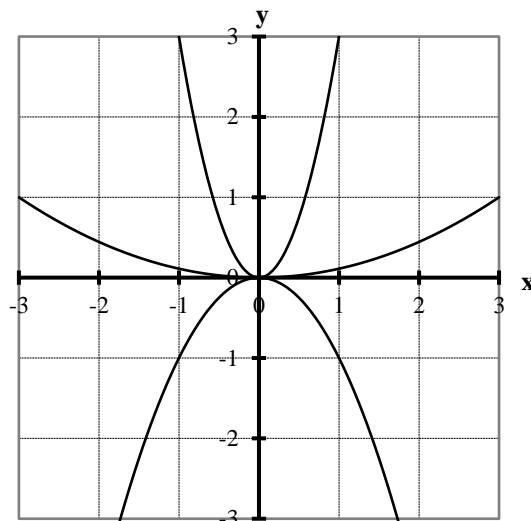
$$f_1(x) =$$

$$f_2(x) =$$

$$f_3(x) =$$

b) Zeichne die folgenden Parabeln ebenfalls in das Koordinatensystem:

$$f_4(x) = \frac{1}{3}x^2, \quad f_5(x) = -\frac{1}{4}x^2 \quad \text{und} \quad f_6(x) = -2x^2.$$



Aufgabe 2: Verschiebung in y-Richtung

a) Bestimme die Gleichungen der rechts abgebildeten Parabeln:

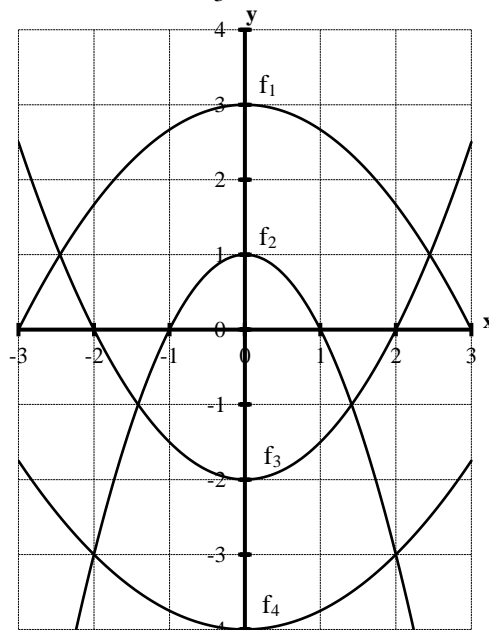
$$f_1(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_2(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f_3(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_4(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Zeichne die folgenden Parabeln ebenfalls in das Koordinatensystem:

$$f_5(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4, \quad f_6(x) = x^2 - 1$$

$$f_7(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \quad f_8(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$$



Aufgabe 3: Verschiebung in x-Richtung

a) Bestimme die Gleichungen der rechts abgebildeten Parabeln:

$$f_1(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_4(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

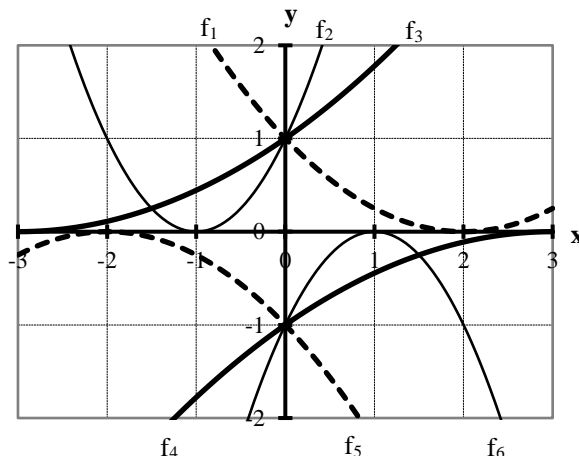
$$f_2(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_5(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f_3(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_6(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Zeichne ebenfalls in das Koordinatensystem:

$$f_7(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 \quad f_8(x) = (x-1)^2 \quad f_9(x) = \frac{1}{9}(x-3)^2$$

$$f_{10}(x) = -\frac{1}{9}(x+3)^2 \quad f_{11}(x) = -(x+1)^2 \quad f_{12}(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2.$$



Aufgabe 4: Scheitelpunktform

Bestimme die Gleichung der verschobenen Normalparabeln mit den folgenden Scheitelpunkten:

a) S(3|0)

c) S(0|2)

e) S(4|2)

g) S(-5|-1)

b) S(-1|0)

d) S(0|-7)

f) S(-3|2)

h) S(3|-2)

Aufgabe 5: Scheitelpunktform

Gib den Scheitelpunkt, die Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung und die Öffnung der Parabel an.

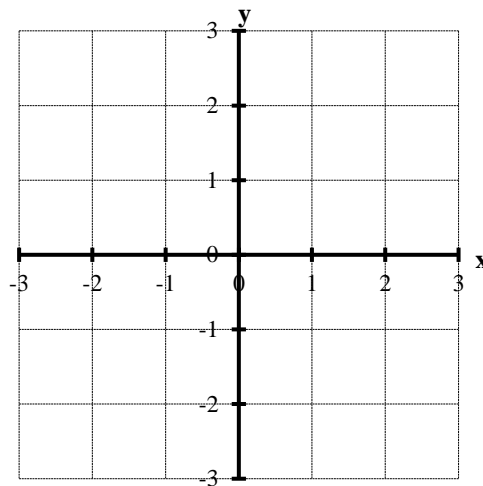
Skizziere dann mit Hilfe dieser Angaben das Schaubild der Parabel ausgehend vom Scheitelpunkt.

$$f_1(x) = -(x+2)^2 + 2 \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$$

$$f_3(x) = (x+2)^2 - 2 \quad f_4(x) = 2(x+2)^2 - 2$$

$$f_5(x) = (x-2)^2 - 2 \quad f_6(x) = 2(x-2)^2 - 2$$

$$f_7(x) = -(x-2)^2 + 2 \quad f_8(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$$



Aufgabe 6: Scheitelpunktform

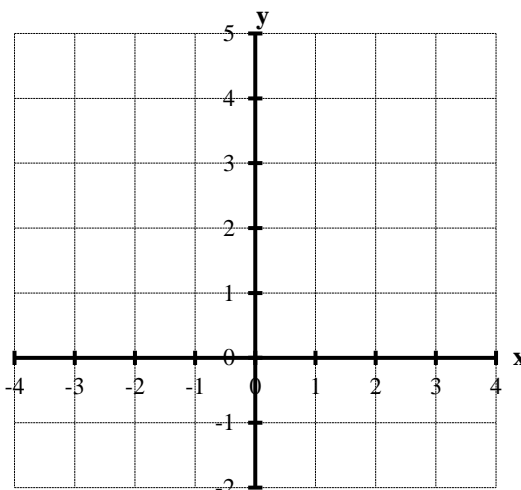
Bestimme die Scheitelpunkte und zeichne die Parabeln in das Koordinatensystem rechts ein. Welche Parabel fehlt?

$$f_1(x) = -2(x+3)^2 + 5 \quad f_2(x) = -(x+2)^2 + 1$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1$$

$$f_5(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad f_6(x) = -(x-2)^2 + 1$$

$$f_7(x) = -2(x-3)^2 + 5 \quad f_8(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$



Aufgabe 7: Scheitelpunktform

Bestimme die Scheitelpunktform und den Scheitelpunkt der folgenden Parabeln.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

g) $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$

m) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3}$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

h) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$

n) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{7}{2}$

c) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

i) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$

o) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

j) $f(x) = -x^2 - 5x - 4$

p) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 5$

e) $f(x) = x^2 - 2x$

k) $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

q) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3}$

f) $f(x) = x^2 + 6x + 8$

l) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{15}{2}$

r) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

Aufgabe 8: Achsenschnittpunkte

Untersuche die Parabeln aus Aufgabe 6 auf Achsenschnittpunkte.

Aufgabe 9: Achsenschnittpunkte

Untersuche die Parabeln aus Aufgabe 7 auf Achsenschnittpunkte.

Aufgabe 10: Satz von Vieta

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen durch Probieren. Berechne die Normalform $f(x) = x^2 + px + q$ durch Ausmultiplizieren. Wie lassen sich die Koeffizienten p und q aus den Nullstellen x_1 und x_2 berechnen?

a) $f(x) = (x+1) \cdot (x+2)$

c) $f(x) = (x+2) \cdot (x+4)$

e) $f(x) = (x+u) \cdot (x+4)$ mit $u \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = (x+2) \cdot (x+3)$

d) $f(x) = (x+3) \cdot (x+4)$

f) $f(x) = (x+u) \cdot (x+v)$ mit $u, v \in \mathbb{R}$

Aufgabe 11: Satz von Vieta

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen durch Probieren mit dem Satz von Vieta:

- a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$ e) $f(x) = x^2 - 7x + 12$ i) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{7}{2}$
 b) $f(x) = x^2 + 6x + 5$ f) $f(x) = x^2 + x - 12$ j) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$
 c) $f(x) = x^2 + 7x + 12$ g) $f(x) = x^2 - x - 30$ k) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$
 d) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ h) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ l) $f(x) = -3x^2 + 6x + 9$

Aufgabe 12: Intervallschreibweise

Gib die folgenden Mengen in Intervallschreibweise an.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R}: 4 < x < 8\}$ f) $F = \{x \in \mathbb{R}: 4 < x\}$
 b) $B = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x < 5\}$ g) $G = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2 \text{ oder } x \geq 3\}$
 c) $C = \{x \in \mathbb{R}: -100 < x \leq 30\}$ h) $H = \{x \in \mathbb{R}: x < -3 \text{ oder } x > 2\}$
 d) $D = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 45\}$ i) $I = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -5 \text{ oder } x > 5\}$
 e) $E = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\}$ j) $J = \{x \in \mathbb{R}: x < -6 \text{ oder } x \geq 6\}$

Aufgabe 13: Quadratische Ungleichungen

Vervollständige die Tabelle. Trage dazu jeweils die Bereiche ein, in denen die Funktion größer, echt größer, kleiner bzw. echt kleiner als Null ist:

$f(x) =$	$f(x) \geq 0$ für $x \in$	$f(x) > 0$ für $x \in$	$f(x) < 0$ für $x \in$	$f(x) \leq 0$ für $x \in$
$x^2 + x - 2$	$\mathbb{R} \setminus]-2; 1[$	$\mathbb{R} \setminus [-2; 1]$	$] -2; 1[$	$[-2; 1]$
$x^2 - x - 12$				
$-x^2 - x + 6$				
$-x^2 + 5x - 6$				
$x^2 + 3x + 4$				
$-x^2 + 2x - 1$				
$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3$				
$\frac{1}{2}x^2 - 5x - 12$				
$x^2 + 4x + 4$				

Aufgabe 14: Gemeinsame Punkte

Bestimme die Koordinaten aller gemeinsamen Punkte von f und g:

- a) $f(x) = x^2 + 2x$ und $g(x) = x + 6$ d) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ und $g(x) = -x + 1$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ und $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ e) $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 - 1$
 c) $f(x) = x^2 - 4x - 2$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 6$ f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ und $g(x) = -x^2 - 2x + 2$

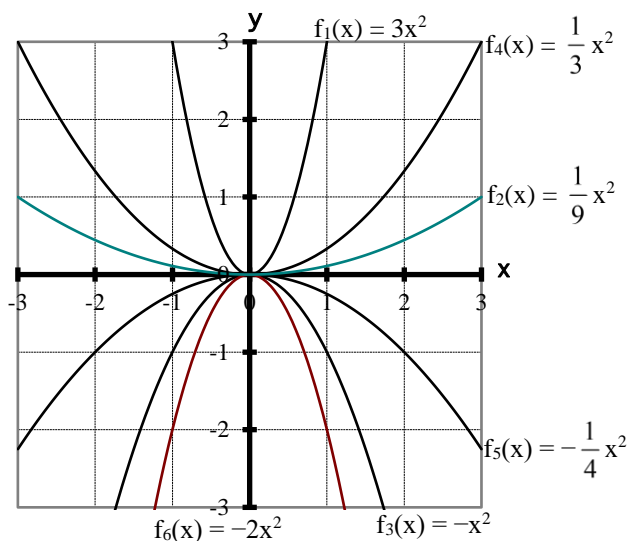
Aufgabe 15: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus drei gegebenen Punkten

Bestimme die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte P_1 , P_2 und P_3 verläuft.

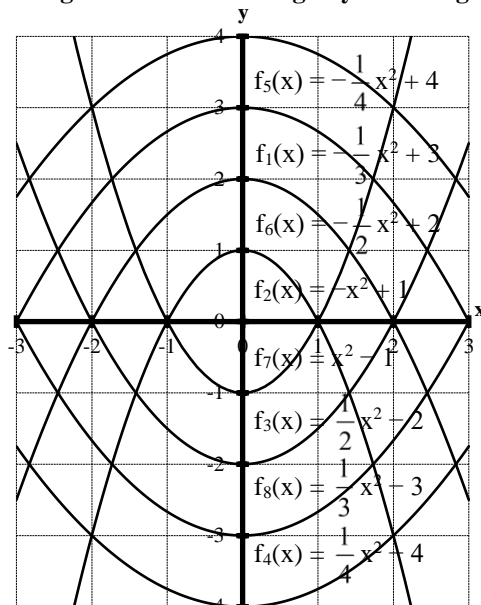
- a) $P_1(0|0)$, $P_2(1|2)$ und $P_3(3|-6)$ d) $P_1(1|3)$, $P_2(-1|1)$ und $P_3(2|7)$
 b) $P_1(0|-2)$, $P_2(2|1)$ und $P_3(-1|-\frac{11}{4})$ e) $P_1(1|1)$, $P_2(-1|3)$ und $P_3(2|3)$
 c) $P_1(-2|2)$, $P_2(-1|0)$ und $P_3(3|-28)$ f) $P_1(2|7)$, $P_2(1|3)$ und $P_3(0|1)$.

4.2. Lösungen zu den Aufgaben zu quadratischen Funktionen

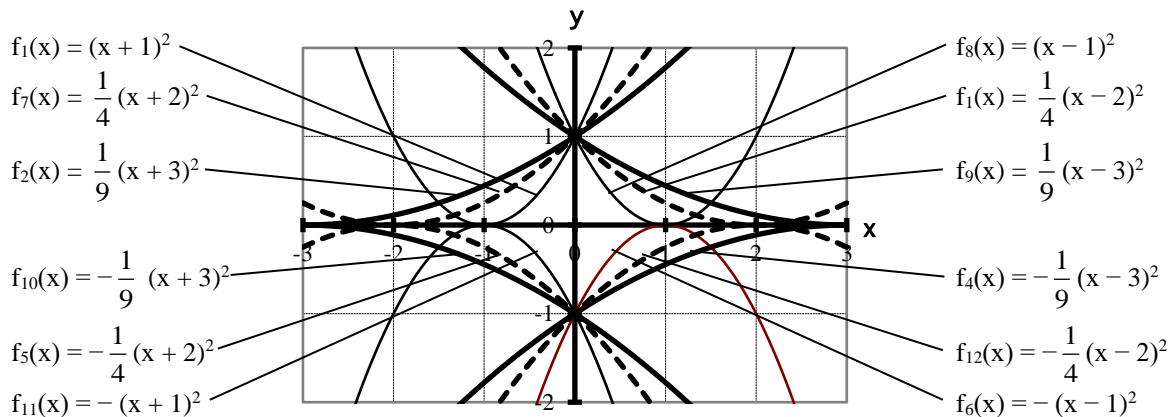
Aufgabe 1: Stauchung und Streckung



Aufgabe 2: Verschiebung in y-Richtung



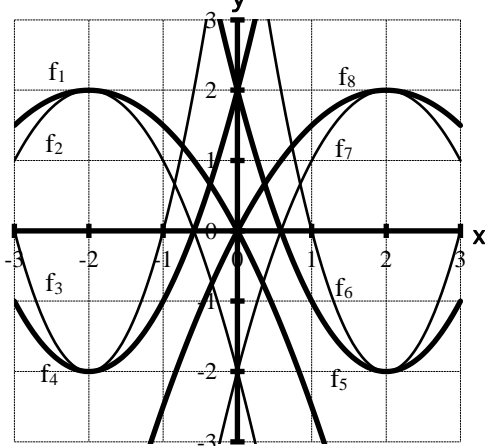
Aufgabe 3: Verschiebung in x-Richtung



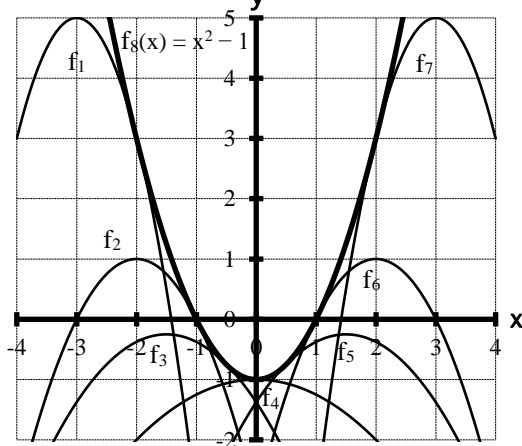
Aufgabe 4: Scheitelpunktform

- a) $f(x) = (x-3)^2$ c) $f(x) = x^2 + 2$ e) $f(x) = (x-4)^2 + 2$ g) $f(x) = (x+5)^2 - 1$
 b) $f(x) = (x+1)^2$ d) $f(x) = x^2 - 7$ f) $f(x) = (x+3)^2 + 2$ h) $f(x) = (x-3)^2 - 2$

Aufgabe 5: Scheitelpunktform



Aufgabe 6: Scheitelpunktform



Aufgaben 8: Achsenschnittpunkte

$f_1: S_{1y}(0|-13)$ und $S_{1x/2}(-3 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}|0)$, $f_2: S_{2y}(0|-3)$ und $S_{2x/2}(-2 \pm 1|0)$, $f_3: S_{3y}(0|-\frac{5}{4})$, $f_4: S_{4y}(0|-1)$, $f_5: S_{5y}(0|-\frac{5}{4})$, $f_6: S_{6y}(0|-3)$ und $S_{6x/2}(2 \pm 1|0)$, $f_7: S_{7y}(0|-13)$ und $S_{7x/2}(3 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}|0)$ und $f_8: S_{8y}(0|-1)$

Aufgaben 7 und 9: Scheitelpunkte und Achsenschnittpunkte

Aus Platzgründen sind nur Scheitelpunkte und Schnittpunkte mit der x-Achse angegeben.

- a) $S(-2|0)$, doppelte NST! g) $S(1|-18)$, $S_{x/2}(1 \pm 3|0)$ m) $S(\frac{3}{2} | -\frac{25}{12})$, $S_{x/2}(\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2})$
- b) $S(-2|-1)$, $S_{x/2}(-2 \pm 1|0)$ h) $S(\frac{3}{2} | -\frac{1}{2})$, $S_{x/2}(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}|0)$ n) $S(1|-4)$, $S_{x/2}(1 \pm \sqrt{8}|0)$
- c) $S(-2|-6)$, $S_{x/2}(-2 \pm \sqrt{6}|0)$ i) $S(-1|4)$, $S_{x/2}(-1 \pm \sqrt{2}|0)$ o) $S(-1|4)$, $S_{x/2}(-1 \pm 4|0)$
- d) $S(1|0)$, doppelte NST! j) $S(-\frac{5}{2} | \frac{9}{4})$, $S_{x/2}(-\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}|0)$ p) $S(-2|-3)$, keine NST!
- e) $S(1|-1)$, $S_{x/2}(-1 \pm 1|0)$ k) $S(-2|0)$ (doppelte NST!) q) $S(3 | \frac{3}{4})$, $S_{x/2}(3 \pm 2|0)$
- f) $S(-3|-1)$, $S_{x/2}(-3 \pm 1|0)$ l) $S(4 | -\frac{1}{2})$, $S_{x/2}(4 \pm 1|0)$ r) $S(-3 | -\frac{1}{4})$, $S_{x/2}(-3 \pm 1|0)$

Aufgabe 10: Satz von Vieta

- a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ c) $f(x) = x^2 + 6x + 8$ e) $f(x) = x^2 + (u + 4)x + 4u$
- b) $f(x) = x^2 + 5x + 6$ d) $f(x) = x^2 + 7x + 12$ f) $f(x) = x^2 + (u + v)x + uv$

Aufgabe 11: Satz von Vieta

- a) $f(x) = (x + 2)(x + 3)$ e) $f(x) = (x - 3)(x - 4)$ i) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x + 7)$
- b) $f(x) = (x + 1)(x + 5)$ f) $f(x) = (x - 3)(x + 4)$ j) $f(x) = \frac{1}{3}(x - 1)(x + 7)$
- c) $f(x) = (x + 3)(x + 4)$ g) $f(x) = (x - 6)(x + 5)$ k) $f(x) = 2(x - 1)(x + 2)$
- d) $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ h) $f(x) = (x - 1)(x + 5)$ l) $f(x) = -3(x - 3)(x + 1)$

Aufgabe 12: Intervallschreibweise

- a) $A =]4; 8[$ f) $F =]4; \infty[$
- b) $B = [-2; 5[$ g) $G = \mathbb{R} \setminus]-2; 3[$
- c) $C =]-100; 30]$ h) $H = \mathbb{R} \setminus [-3; 2]$
- d) $D = [2; 45]$ i) $I = \mathbb{R} \setminus]-5; 5]$
- e) $E =]-\infty; 2]$ j) $J = \mathbb{R} \setminus [-6; 6[$

Aufgabe 13: Quadratische Ungleichungen

$f(x) =$	$f(x) \geq 0$ für $x \in$	$f(x) > 0$ für $x \in$	$f(x) < 0$ für $x \in$	$f(x) \leq 0$ für $x \in$
$x^2 + x - 2$	$\mathbb{R} \setminus]-2; 1[$	$\mathbb{R} \setminus [-2; 1]$	$] -2; 1[$	$[-2; 1]$
$x^2 - x - 12$	$\mathbb{R} \setminus]-3; 4[$	$\mathbb{R} \setminus [-3; 4]$	$] -3; 4[$	$[-3; 4]$
$-x^2 - x + 6$	$[-3; 2]$	$] -3; 2[$	$\mathbb{R} \setminus [-3; 2]$	$\mathbb{R} \setminus]-3; 2[$
$-x^2 + 5x - 6$	$[2; 3]$	$]2; 3[$	$\mathbb{R} \setminus [2; 3]$	$\mathbb{R} \setminus]2; 3[$
$x^2 + 3x + 4$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\{\}$	$\{\}$
$-x^2 + 2x - 1$	$\{1\}$	$\{\}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	\mathbb{R}
$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3$	$[-3; -2]$	$] -3; -2[$	$\mathbb{R} \setminus [-3; -2]$	$\mathbb{R} \setminus]-3; -2[$
$\frac{1}{2}x^2 - 5x - 12$	$\mathbb{R} \setminus]-2; 12[$	$\mathbb{R} \setminus [-2; 12]$	$] -2; 12[$	$[-2; 12]$
$x^2 + 4x + 4$	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \{-2\}$	$\{\}$	$\{-2\}$

Aufgabe 14: Gemeinsame Punkte

- a) $S_1(-3|3)$ und $S_2(2|8)$ c) $S_1(-1|3)$ und $S_2(4|-2)$ e) keine gemeinsamen Punkte
 b) $S_1(-1|1)$ und $S_2(-2|\frac{5}{2})$ d) $S_{1/2}(-2|3)$ (Berührpunkt) f) keine gemeinsamen Punkte

Aufgabe 15: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus drei gegebenen Punkten

- a) $f(x) = -2x^2 + 4x$ c) $f(x) = -x^2 - 5x - 4$ e) $f(x) = x^2 - x + 1$
 b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ d) $f(x) = x^2 + x + 1$ f) $f(x) = x^2 + x + 1$

Aufgabe 16: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus Scheitelpunkt und einem weiteren Punkt

- a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ c) $f(x) = -2x^2 + 4x$ e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 1$
 b) $f(x) = -x^2 - 5x - 4$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$ f) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

Aufgabe 17: Anwendungsaufgaben

- a) Die Brücke ist 104 m lang und 13,52 m hoch
 b) Die Brücke ist 100 m lang und 12 m hoch.
 c) Der Tunnel ist 11 m hoch und 10,5 m breit. Der waagrechte Abstand zur Tunnelwand ist 68 cm
 d) Die Kugeln fliegen 2 bzw. 20 Sekunden lang und erreichen eine Höhe von 5 bzw. 500 Metern.

Aufgabe 18: Parabelscharen und Ortskurven

- a) $x_{1/2} = \frac{t}{2} \pm \frac{t}{2}$ und $S_t\left(\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4}\right) \Rightarrow$ Ortskurve $y = -x^2$
 b) $x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{t-9}$, falls $t \neq 9$ und $S_t(-3 \mid -9+t) \Rightarrow$ Ortskurve $x = -3$
 c) $x_{1/2} = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} - 2}$, falls $t \neq \sqrt{8}$ und $S_t\left(-\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4} + 2\right) \Rightarrow$ Ortskurve $y = -x^2 + 2$
 d) $x_{1/2} = t \pm \sqrt{t^2 + 2t - 1}$, falls $t \leq -1 - \sqrt{2}$ oder $t \neq -1 + \sqrt{2}$ und $S_t(t \mid -t^2 - 2t + 1) \Rightarrow y = -x^2 - 2x + 1$
 e) $x_{1/2} = \frac{1}{t} \pm \sqrt{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} - 1\right)}$, falls $t \neq 1$ und $S_t\left(\frac{1}{t} \mid -\frac{1}{t} + 1\right)$, falls $t \geq 0 \Rightarrow$ Ortskurve $y = -x + 1$
 f) $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{-t}$, falls $t \leq 0$ und $S_t(1 \mid -t) \Rightarrow$ Ortskurve $x = 1$
 g) $x_{1/2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{t}}$, falls $t \geq 0$ und $S_t(1 \mid -1) \Rightarrow$ keine Ortskurve, sondern gemeinsamer Scheitelpunkt
 h) $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-t}$, falls $t \leq 1$ und $S_t(-1 \mid t-1) \Rightarrow$ Ortskurve $x = -1$

Aufgabe 19: Quadratische Gleichungen

- a) $L = \{-3\}$ b) $L = \{-10; 0\}$ c) $L = \{1; -1\}$ d) $L = \{1; 10\}$

Aufgabe 20: Quadratische Bruchgleichungen

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ und $L = \{1; 2\}$ e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$ und $L = \{0; 5\}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$ und $L = \{\}$ f) $D = \mathbb{R} \setminus \{6; -6\}$ und $L = \{\}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ und $L = \{6; 13\}$ g) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -2; 3\}$ und $L = \{\}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{3; -3\}$ und $L = D$ h) $D = \mathbb{R} \setminus \{4; 3; 2\}$ und $L = \{\}$

Aufgabe 21: Gemeinsame Punkte bei Kurvenscharen

- a) $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - t} \Rightarrow$ Schnittpunkte für $t < \frac{5}{4}$, Berührpunkt für $t = \frac{5}{4}$, keine gem. Punkte für $t > \frac{5}{4}$
 b) $x_{1/2} = \frac{1}{2t} \pm \sqrt{\frac{1+4t}{4t^2}} \Rightarrow$ Schnittpunkte für $t > -\frac{1}{4}$, Berührpunkt für $t = -\frac{1}{4}$, keine gem. Punkte für $t < -\frac{1}{4}$
 c) $x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1-2t}{4}} \Rightarrow$ Schnittpunkte für $t < \frac{1}{2}$, Berührpunkt für $t = \frac{1}{2}$, keine gem. Punkte für $t > \frac{1}{2}$