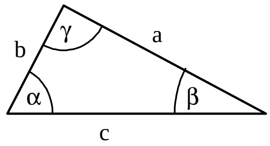
4.8. Prüfungsaufgaben zur Trigonometrie

Aufgabe 1a: Rechtwinkliges Dreieck mit Seite und Winkel
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse c sind die Kathete b = 45 m und der Winkel β = 61° gegeben. Berechne die beiden fehlenden Seiten a und c sowie den Winkel α.

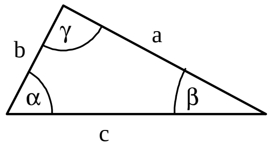


Lösung
$\alpha = 90° - 61° = 29°$

$c = \dfrac{b}{\sin\beta} \approx 51{,}45$ cm

$a = c \cdot \sin(\alpha) \approx 45$ cm

Aufgabe 1b: Rechtwinkliges Dreieck mit Seite und Winkel
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind der Winkel α = 41,4° und die Kathete b = 17,3 m gegeben. Berechne die fehlenden Seiten a und c sowie den Winkel β.

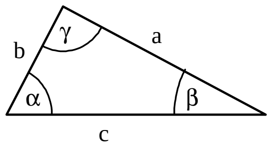


Lösung
$\beta = 90° - \alpha \approx 48{,}6°$

$c = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{17{,}3\text{ m}}{\sin(41{,}4°)} \approx 23{,}06$ m

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(23{,}06\text{ m})^2 - (17{,}3\text{ m})^2} \approx 15{,}21$ m

Aufgabe 1c: Rechtwinkliges Dreieck mit Seite und Winkel
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Kathete a = 6,2 m und der Winkel α = 52° gegeben. Berechne die fehlenden Seiten b und c sowie den Winkel β.

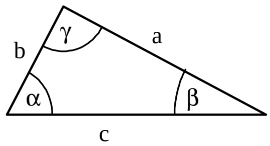


Lösung
$\beta = 90° - \alpha = 38°$

$c = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{6{,}2\text{ m}}{\sin(52°)} \approx 7{,}87$ m

$b = c \cdot \sin(\beta) \approx 8{,}87\text{ m} \cdot \sin(38°) \approx 4{,}84$ m

Aufgabe 1d: Rechtwinkliges Dreiecke mit Seite und Winkel
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Kathete a = 6,2 m und der Winkel β = 49° gegeben. Berechne die fehlenden Seiten b und c sowie den Winkel α.

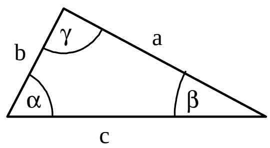


Lösung
$\alpha = 90° - \beta \approx 41°$

$c = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{6{,}2\text{ m}}{\sin(41°)} \approx 9{,}45$ m

$b = c \cdot \sin(\beta) \approx 9{,}45\text{ m} \cdot \sin(49°) \approx 7{,}13$ m

Aufgabe 2a: Rechtwinkliges Dreieck mit zwei Seiten
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Hypotenuse c = 100 m und die Kathete b = 45 m gegeben. Berechne die fehlende Seite a sowie die Winkel α und β.

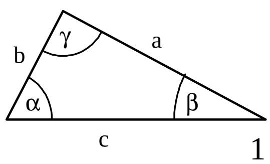


Lösung
$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(100\text{ m})^2 - (45\text{ m})^2} \approx 89{,}30$ m

$\beta = \sin^{-1}(\dfrac{b}{c}) = \sin^{-1}(\dfrac{45\text{ m}}{100\text{ m}}) \approx 26{,}74°$

$\alpha = 90° - \beta \approx 63{,}26°$

Aufgabe 2b: Rechtwinkliges Dreieck mit zwei Seiten
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Katheten a = 6,2 m und b = 2,5 m gegeben. Berechne die fehlende Hypotenuse c sowie die Winkel α und β.



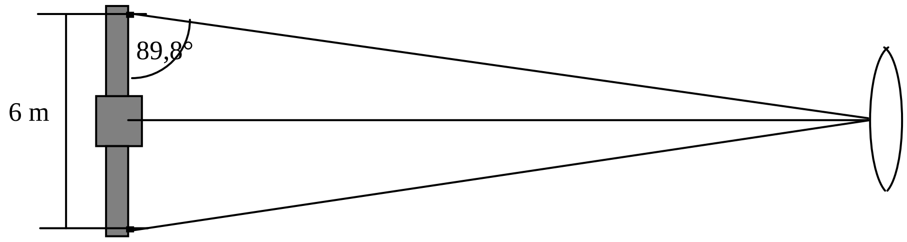
Lösung

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(6{,}2\ \text{m})^2 - (2{,}5\ \text{m})^2} \approx 6{,}68$ m

$\alpha = \tan^{-1}(\frac{a}{b}) = \tan^{-1}(\frac{6{,}2\ \text{m}}{2{,}5\ \text{m}}) \approx 68{,}04°$

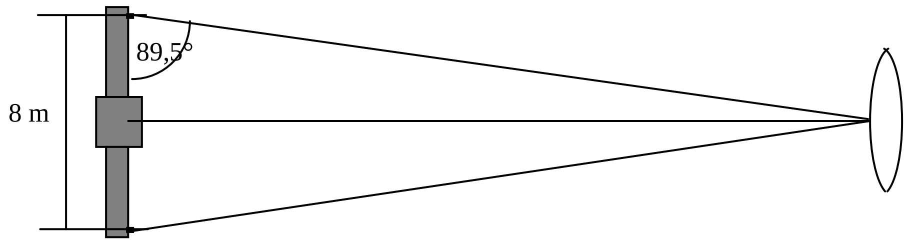
$\beta = 90° - \alpha \approx 21{,}96°$

Aufgabe 3a: Entfernungen (2)
Vor der Erfindung des Radars bestimmte man Entfernungen auf See ähnlich wie Menschen und andere Tiere mit zusammenhängendem Sehfeld durch Winkelmessung an einem Paar „Augen" in teilweise sehr großen optischen Entfernungsmessern. Wie weit ist das Schiff unten vom Entfernungsmesser entfernt?



Lösung
d = 3 m·tan(89,8°) ≈ 859,43 m

Aufgabe 3b: Entfernungen (2)
Vor der Erfindung des Radars bestimmte man Entfernungen auf See ähnlich wie Menschen und Vögel durch Winkelmessung an einem Paar „Augen" in teilweise sehr großen optischen Entfernungsmessern. Wie weit ist das Schiff unten vom Entfernungsmesser entfernt?



Lösung
d = 4 m·tan(89,5°) ≈ 458,35 m

Aufgabe 4a: Steigungswinkel
Wie groß ist der Steigungswinkel einer Rampe, die auf einer Strecke von 20 m eine Höhe von 3 m erreicht ?

Lösung

$\alpha = \tan^{-1}(\frac{3}{20}) \approx 8{,}53°$.

Aufgabe 4b: Steigungswinkel
Wie groß ist der Steigungswinkel einer Rampe, die auf einer Strecke von 100 m eine Höhe von 5 m erreicht?

Lösung

$\alpha = \tan^{-1}(\frac{5}{100}) \approx 2{,}86°$.

Aufgabe 5a: Schnittwinkel zweier Geraden

In welchem Winkel schneiden sich die Geraden $g_1(x) = x - 2$ und $g_2(x) = -\frac{1}{3}x + 1$?

Lösung:

$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-\frac{1}{3}) \approx 45° - (18{,}4°) = 63{,}4°$

Aufgabe 5b: Schnittwinkel zweier Geraden

In welchem Winkel schneiden sich die Geraden $g_1(x) = \frac{2}{3}x - 2$ und $g_2(x) = -x + 1$?

Lösung:

$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \tan^{-1}(\frac{2}{3}) - \tan^{-1}(-1) \approx 33{,}7° - (-45°) = 78{,}7°$

Aufgabe 6a: Pyramiden

Berechne die übrigen Größen s, h, h_s und α_h einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Seitenkanten einen Neigungswinkel von $\alpha_s = 50°$ zur Grundfläche besitzen und deren Grundseite g = 10 cm lang ist.

Lösung

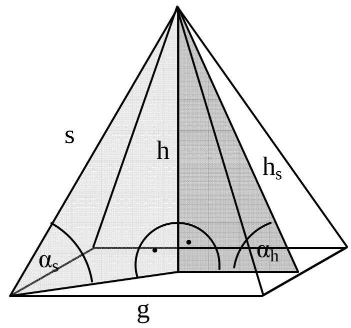
Diagonale $d = \sqrt{2}\,g \approx 14{,}14$ cm

Höhe $h = \dfrac{\frac{1}{2}d}{\tan(\alpha_s)} \approx \dfrac{7{,}07\text{ cm}}{\tan(50°)} \approx 8{,}42$ cm

Seitenlänge $s = \dfrac{\frac{1}{2}d}{\cos(\alpha_s)} \approx \dfrac{7{,}07\text{ cm}}{\cos(50°)} \approx 11{,}06$ cm

Seitenhöhe $h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2} \approx \sqrt{(8{,}42\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2} \approx 9{,}79$ cm

Seitenwinkel $\alpha_h \approx \sin^{-1}(\dfrac{h}{h_s}) \approx \sin^{-1}(\dfrac{8{,}42\text{ cm}}{9{,}79\text{ cm}}) \approx 59{,}20°$



Aufgabe 6b: Pyramiden

Berechne die übrigen Größen s, g, h_s und α_s einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Seitenflächen einen Neigungswinkel von $\alpha_h = 50°$ zur Grundfläche besitzen und deren Höhe h = 5 cm beträgt.

Lösung

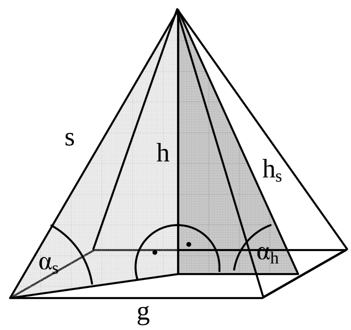
Grundseite $g = \dfrac{2h}{\tan(\alpha_h)} = \dfrac{10\text{ cm}}{\tan(50°)} \approx 8{,}39$ cm

Diagonale $d = \sqrt{2}\,g \approx 11{,}87$ cm

Seitenlänge $s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx \sqrt{(5\text{ cm}^2 + (5{,}93\text{ cm})^2} \approx 7{,}76$ cm

Seitenhöhe $h_s = \dfrac{h}{\sin(\alpha_h)} = \dfrac{5\text{ cm}}{\sin(50°)} \approx 6{,}53$ cm

Kantenwinkel $\alpha_s \approx \sin^{-1}(\dfrac{h}{s}) \approx \sin^{-1}(\dfrac{5\text{ cm}}{7{,}76\text{ cm}}) \approx 40{,}12°$



Aufgabe 7: Würfel (6)

Die Oberfläche eines Würfels beträgt 384 cm.

a) Berechnen Sie die Länge der Seitenkante a! (2)
b) Berechnen Sie die Länge einer Raumdiagonalen! (2)
c) Wie groß ist der Winkel α, den die Raumdiagonale mit einer Flächendiagonalen einschließt? (2)

Lösung

Oberfläche $O = 6a^2 \Leftrightarrow$ Seitenkante $a = \sqrt{\dfrac{O}{6}} = \sqrt{64} = 8$ cm

Flächendiagonale $d_f = \sqrt{(8\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2} \approx 11{,}31$ cm

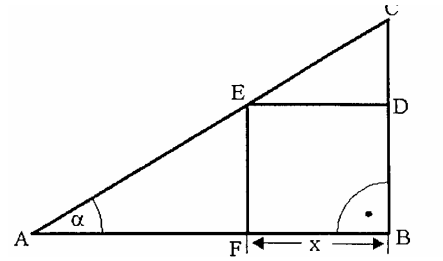
Raumdiagonale $d = \sqrt{(11{,}31\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2} \approx 13{,}86$ cm

Winkel $\alpha = \sin^{-1}(\dfrac{8\text{ cm}}{13{,}86\text{ cm}}) \approx 35{,}25°$

Aufgabe 8: Rechtwinklige Dreiecke mit Strahlensatz (6)

Von dem rechtwinkligen Dreieck ABC (vgl. Skizze) sind gegeben:
AB = 7,5 cm und BC = 4 cm

a) Berechne den Winkel α (2)
b) In das Dreieck ABC wird das Quadrat BDEF eingezeichnet (siehe Skizze). Berechne die Seitenlänge x. (4)



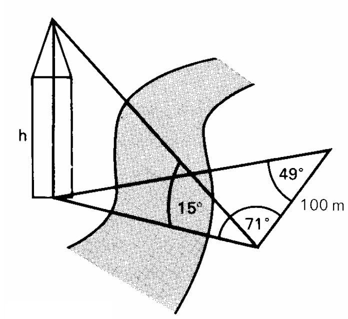
Lösung

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4\text{ cm}}{7{,}5\text{ cm}}\right) \approx 28{,}07°$

$\frac{4\text{ cm}}{7{,}5\text{ cm}} = \frac{x}{7{,}5\text{ cm} - x} \Leftrightarrow 4\cdot(7{,}5\text{ cm} - x) = 7{,}5\cdot x \Leftrightarrow 30\text{ cm} = 11{,}5\ x \Leftrightarrow x \approx 2{,}61\text{ cm}$

Aufgabe 9: Sinussatz (4)

Um die Höhe eines Turmes, der jenseits eines Flusses liegt, zu bestimmen, werden eine Reihe von Messungen vorgenommen, die aus der nebenstehenden Skizze hervorgehen. Berechne die Höhe des Turms.



Lösung

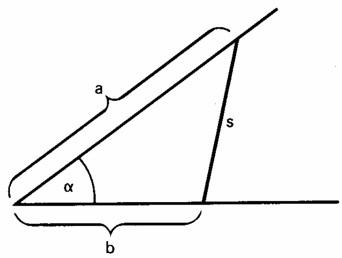
$\gamma = 180° - 49° - 71° = 60°$

$\Rightarrow c = a\cdot\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 100\text{ m}\cdot\frac{\sin(49°)}{\sin(60°)} = 87{,}15\text{ m}$

$\Rightarrow h = c\cdot\tan(15°) = 23{,}36\text{ m}$

Aufgabe 10: Kosinussatz (4)

Zwischen zwei Balken, die den Winkel α = 60° bilden, soll zur Stabilisierung ein weiterer Balken der Länge s = 7 m eingezogen werden (siehe Skizze). Aus ästhetischen Gründen sollen dabei die beiden Strecken a und b im Verhältnis a:b = 3:2 zueinander stehen.



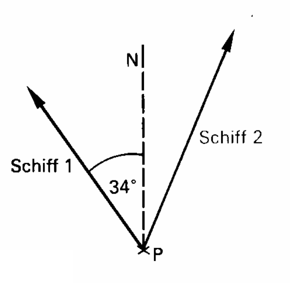
Lösung

$7^2 = a^2 + (1{,}5a)^2 - 2\cdot a\cdot 1{,}5a\cdot\cos(60°) \Leftrightarrow 49 = 1{,}75a^2 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{7} \Rightarrow a \approx 5{,}3\text{ m}$

$\Rightarrow b = 1{,}5\cdot a = 3\sqrt{7} \approx 7{,}94\text{ m}$

Aufgabe 11: Kosinussatz (5)

Vom Punkt P fährt ein Schiff den Kurs N 34° W mit einer Geschwindigkeit von 35 km/h . Ein zweites Schiff verlässt P eine Stunde später unter dem Kurs N 26° O mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h (siehe Skizze). Nach welcher Zeit t (von der Abfahrt des ersten Schiffes an gerechnet) sind die beiden Schiffe 77,5 km voneinander entfernt?



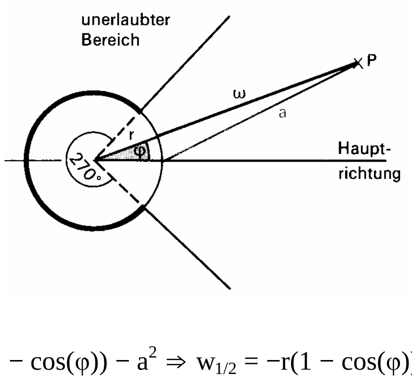
Lösung

$77{,}5^2 = (35(t + 1))^2 + (40t)^2 - 2\cdot 35(t + 1)\cdot 40t\cdot\cos(60°) \Leftrightarrow 0 = 1425t^2 - 175t - 4737{,}25 \Rightarrow t_1 = 1{,}89b\text{ h und } t_2 < 0$

Aufgabe 12: Kosinussatz (5)

In der Leichtathletik wird der Diskus s aus einem Kreis mit Radius r geworfen und soll dann in einem Sektor mit dem Mittelpunktswinkel 90° (Viertelkreis) auftreffen. Landet der Diskus im Punkt P neben der Hauptrichtung, so wird nicht die Strecke a gemessen, sondern nur die Länge w.

a) Bestimme die Wurfweite w in Abhängigkeit von a, r und φ.
Ergebnis: $w = \sqrt{a^2 - (\sin(\phi))^2 r^2} - r\,(1 - \cos(\varphi))$
b) Begründe mit Hilfe des Ergebnisses von a), dass w ≠ a ist!



Lösung

$a^2 = (w + r)^2 + r^2 - 2\cdot(w + r)\cdot r\cdot\cos(\varphi) \Rightarrow 0 = w^2 + 2r(1 - \cos(\varphi))w + 2r^2(1 - \cos(\varphi)) - a^2 \Rightarrow w_{1/2} = -r(1 - \cos(\varphi)) \pm r\sqrt{(1-\cos(\phi))^2 - 2 + 2\cos(\phi) + a^2} = \sqrt{a^2 - (\sin(\phi))^2 r^2} - r\,(1 - \cos(\varphi))$