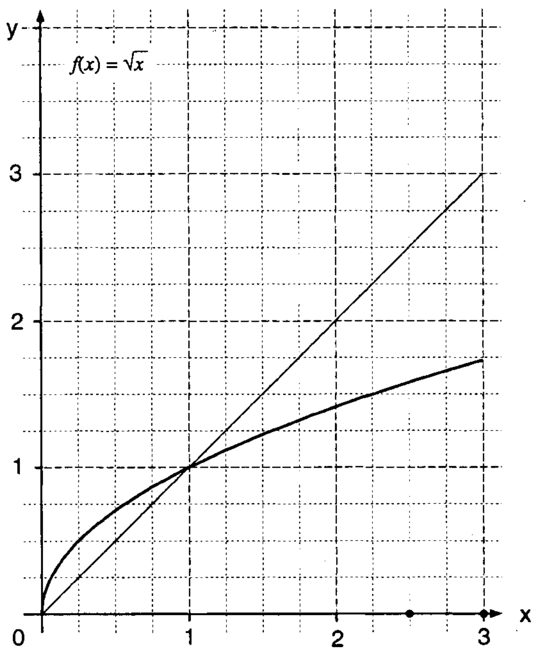
9.5.5. Graphische Fehlerfortpflanzung

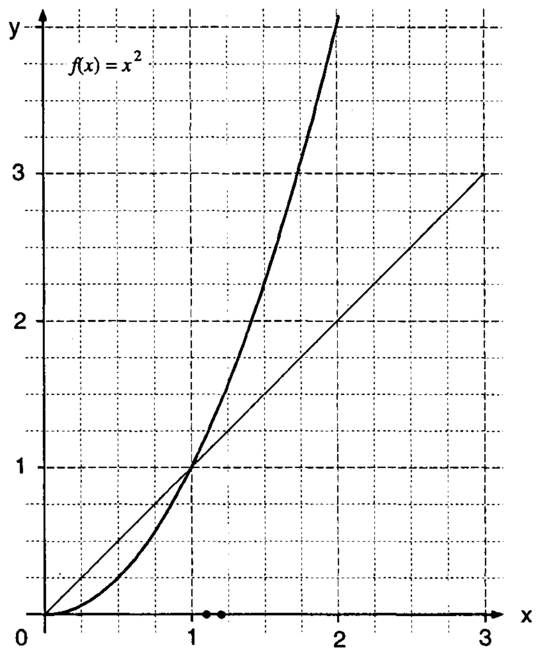
Eine Ursache für chaotisches Verhalten sind Rundungsfehler bzw. Zeichenungenauigkeiten, die bei rechnerischer bzw. graphischer Iteration unvermeidbar sind und bei bestimmten Steigungsverhältnissen fortlaufend verstärkt werden.

a) Untersuche die Entwicklung des Fehlerintervalls [x − Δx; x + Δx] sowohl rechnerisch als auch graphisch auf Kompression oder Expansion:

$f(x) = \sqrt{x}$ mit $\Delta x_0 = 0{,}25$	0	1	2	3
x − Δx =	3,00			
x =	2,75			
x + Δx =	2,50			
absoluter Fehler Δx	0,25			

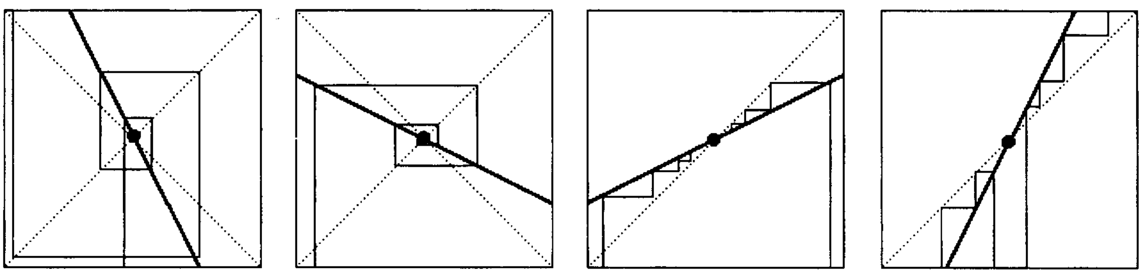
$f(x) = x^2$ mit $\Delta x_0 = 0{,}05$	0	1	2	3
x − Δx =	1,20			
x =	1,15			
x + Δx =	1,10			
absoluter Fehler Δx	0,05			



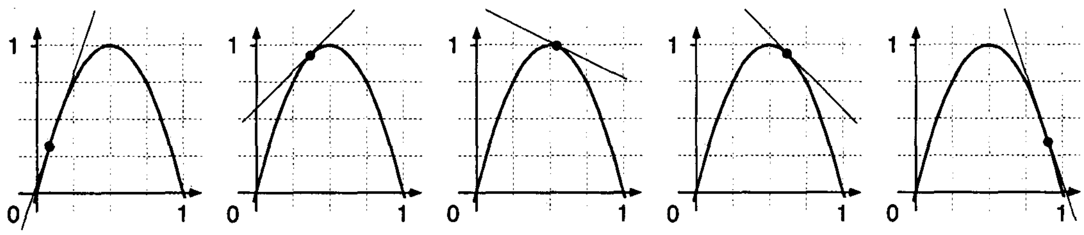


Die Abhängigkeit des Iterationsverhaltens von der Steigung a wurde in 9.4.1. folgendermaßen beschrieben:

a < −1	−1 < a < 0	0 < a < 1	1 < a
Divergenz/Expansion	Konvergenz/Kompression	Konvergenz/Kompression	Divergenz/Expansion
Spirale	Spirale	Treppenlinie	Treppenlinie



Da die Parabel $f_4(x) = 4x(1 - x)$ alle Steigungsbereiche durchläuft, wechselt auch das Verhalten der Iterationslinie entsprechend:



b) In den folgenden Abbildungen sind die Stellen mit Steigung 1 bzw. −1 bereits markiert. Schraffiere und beschrifte die Bereiche, in denen Kompression bzw. Expansion zu erwarten ist.

c) Bei welcher der vier oben gezeichneten Parabeln wird unabhängig vom Startwert das stabilste Iterationsverhalten zu erwarten sein? Welche Parabel wird am ehesten zu chaotischem Iterationsverhalten führen?