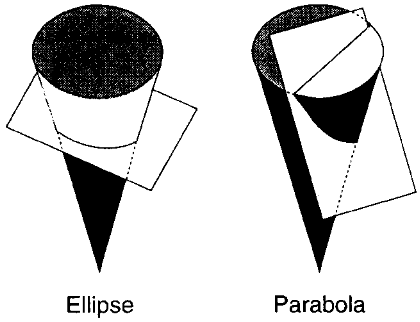
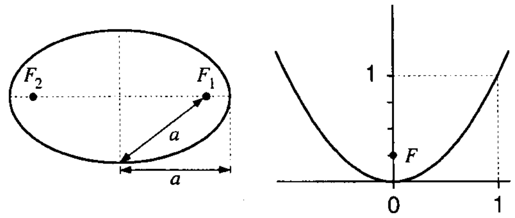
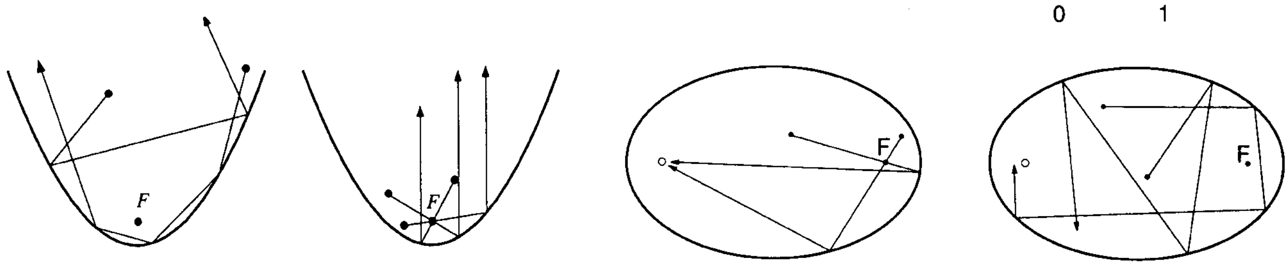
9.6. Die Mandelbrot-Menge

9.6.1. Iterationsfolgen in Kegelschnitten

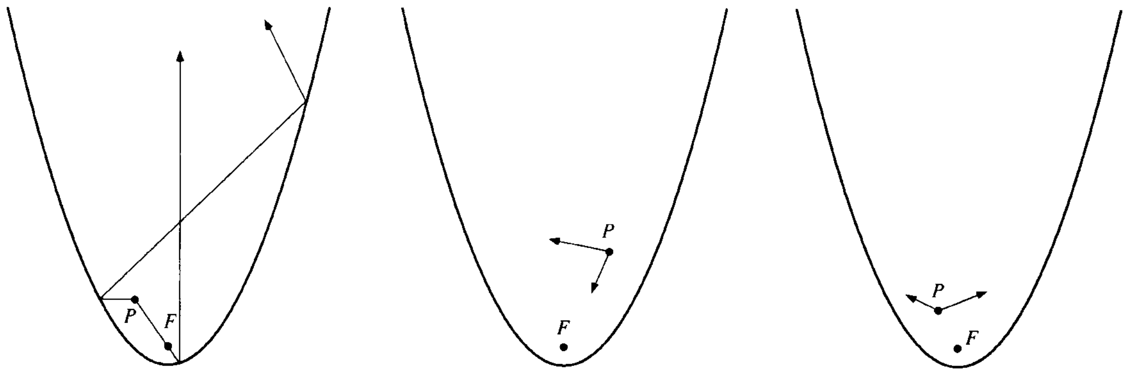


Ein praktisches Beispiel für das Auftreten von Attraktoren und Invariante Mengen sind die **Brennpunkte** in **elliptischen** und **parabolische Spiegeln**. **Kreise**, **Ellipsen**, **Parabeln** und **Hyperbeln** entstehen durch den Schnitt einer Ebene mit einem (Doppel)kegel.
Alle vier **Kegelschnitte** lassen sich algebraisch und geometrisch durch ihre Lage in Bezug auf zwei **Brennpunkte** charakterisieren. Für die ersten drei Kegelschnitte gilt: Ein Lichtstrahl oder Billiardball, der von einem Brennpunkt ausgeht, trifft nach **Reflektion** an der Kurve genau den anderen Brennpunkt.
Die Reflektion gehorcht dabei dem **Brechungsgesetz**: Der **Einfallswinkel** zur **Tangente** im Reflektionspunkt ist gleich dem **Ausfallwinkel**.
Parabeln und **Kreise** lassen sich als spezielle **Ellipsen** betrachten, deren zweiter Brennpunkt im Unendlichen bzw. genau auf dem ersten Brennpunkt liegt.



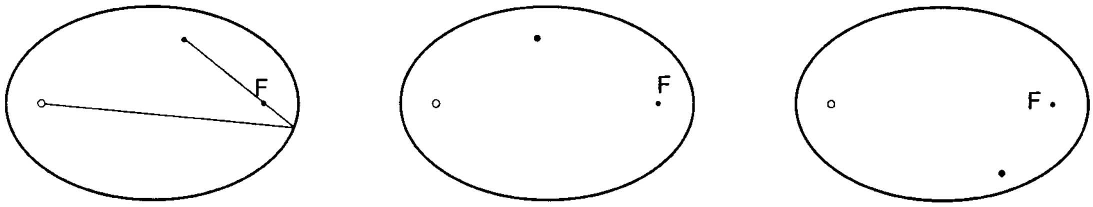


a) Setze die Lichtstrahlen aus der Lichtquelle P so genau wie möglich über zwei Reflektionen bzw. Iterationen fort. F ist der Brennpunkt.



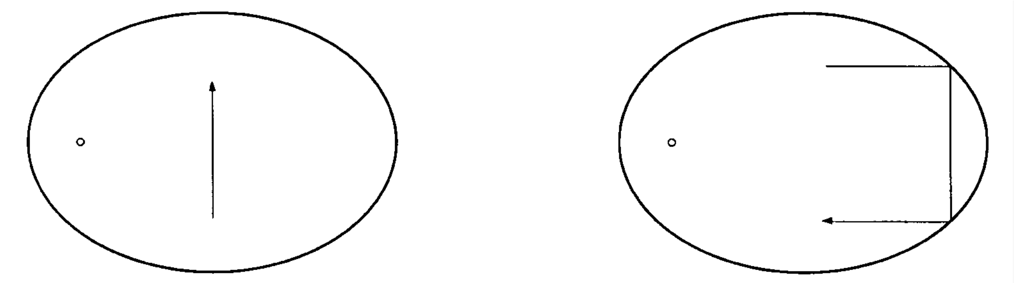
b) Ein Parabolspiegel soll mit einer einfachen punktförmigen Lichtquelle geprüft werden. An welchem Ort stellt man sie auf?

c) Um auf einem elliptischen Billiardtisch einen Brennpunkt F zu treffen, muss der Ball erst den anderen Brennpunkt passieren. Markiere jeweils die Schusslinie vom gegebenen Standort aus. Wie läuft der Ball nach 2, 3, 4, …, ∞ Reflektionen bzw. Iterationen?



d) Ein elliptischer Billiardtisch soll auf Qualität geprüft werden. Wo muss man den Ball hinlegen, damit jeder beliebige (ungezielte) Schuss sofort eine Aussage über die Qualität liefert?

e) Es gibt auch Schussrichtungen, die den Ball wieder in seine ursprüngliche Lage bringen. Erkläre die beiden untenstehenden Skizzen.



f) Angenommen, der Ball ist frei von jeder Reibung und wird unendlich oft reflektiert. In welche Richtung muss man schießen, um konvergentes, periodisches oder „chaotisches“ Verhalten zu bewirken? Bleibt das chaotische Verhalten wirklich chaotisch?

g) Durch die Gleichung $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ wird ein elliptischer Billiardtisch mit Brennpunkten in $(-3|0)$ und $(3|0)$ beschrieben. Welche der folgenden Gleichungen beschreiben Schusslinien, die zum Brennpunkt $(-3|0)$ führen?

$x = 0$ $\qquad$ $y = -x + 3$ $\qquad$ $y = x - 3$

h) Formuliere die Gleichung für die Schusslinie, die von den folgenden Punkten ausgeht und nach einer Reflektion den Punkt $(-3|0)$ trifft.

$(0|0)$ $\qquad$ $(2|2)$ $\qquad$ $(3|0)$

i) Ein Ball startet in $(-4|0)$, wird im Punkt P reflektiert und landet in $(-3|0)$. Wie lauten die Koordinaten von P?

j) Durch die Gleichung $y = \frac{x^2}{4}$ wird ein parabolischer Spiegel mit Brennpunkt in $(0|1)$ beschreiben. Welche der folgenden Gleichungen beschreiben Lichtstrahlen, die den Spiegel nach Reflektion parallel zur Parabelachse verlassen?

$x = 0$ $\qquad$ $y = 0{,}5x + 1$ $\qquad$ $y = -2x$

k) Formuliere die Gleichungen für jeweils zwei Lichtstrahlen durch die folgenden Punkte, die nach Reflektion parallel zur Spiegelachse aus dem Spiegel herauslaufen.

$(2|4)$ $\qquad$ $(-3|6)$ $\qquad$ $(-0{,}5|1{,}5)$