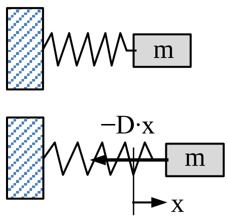
4.1 Schwingungen

4.1.1 Die ungedämpfte Federschwingung



Ein Körper der Masse m hängt im schwerelosen Raum (oder auf einem reibungsfreien Schlitten) an einer Feder mit der Federkonstanten D und wird nun um x_0 aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Aus dem 2. Newtonschen Axiom erhält man die folgende Differentialgleichung für die Ort-Zeit-Funktion x(t):

$$\boxed{-D\cdot x(t) = m\cdot \ddot{x}(t)}$$

Die allgemeine Lösung einer solchen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten findet man mit einem komplexen Exponentialansatz $x(t) = x_0\cdot e^{at}$ mit $a \in \mathbb{C}$. Der Realteil dieser allgemeinen Lösung ist die **Kosinusfunktion**

$$\boxed{x(t) = x_0\cdot\cos(\omega t)}$$

mit **Amplitude** = **Vollausschlag** = **Anfangswert** x_0 und **Winkelgeschwindigkeit** ω. Auch ohne Kenntnisse über Differentialgleichungen ist offensichtlich, dass eine Kosinusfunktion sicher gut geeignet ist für die Beschreibung einer periodischen Bewegung, wie sie bei einer solchen Federschwingung beobachtet werden kann. Zur Bestimmung von ω setzen wir den Ansatz $x(t) = x_0\cdot\cos(\omega t)$ in die Differentialgleichung ein:

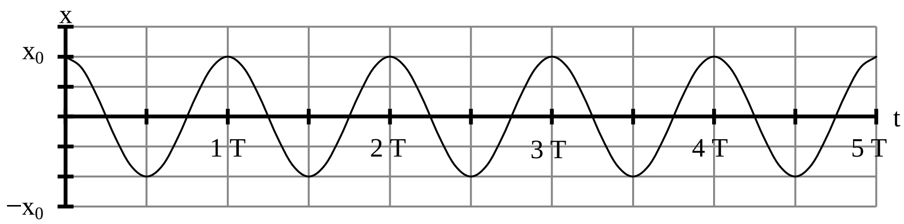
Mit $\dot{x}(t) = -x_0\cdot\omega\cdot\sin(\omega t)$

und $\ddot{x}(t) = -x_0\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t)$

erhält man durch Einsetzen in die obige Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -D\cdot x_0\cdot\cos(\omega t) &= -m\cdot x_0\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t) \\ D &= m\cdot\omega^2 \\ \Rightarrow \quad & \boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}} \end{aligned}$$

Die Kosinusfunktion beschreibt die **Projektion einer Drehbewegung** auf eine Ebene parallel zur Drehachse, so dass man neben der Winkelgeschwindigkeit auch die **Frequenz** $f = \frac{\omega}{2\pi}$ und die **Periodendauer** $T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{m}}$ von der Drehbewegung übernehmen kann:



Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 1 - 5

4.1.2 Die gedämpfte Federschwingung

Bei einer gedämpften Schwingung berücksichtigt man noch die Reibungskraft $F_R(\dot{x}) = -k\,\dot{x}$ in einer zähen Flüssigkeit oder einem gut geschmierten Lager (Newtonsche Reibung bei laminarer Strömung), die proportional zur Geschwindigkeit ist, und erhält die Gleichung $\boxed{-D\cdot x - k\,\dot{x} = m\cdot\ddot{x}(t)}$. Dieses Mal setzen wir den Exponentialansatz $x(t) = x_0\cdot e^{at}$ mit $a \in \mathbb{C}$ gleich in die Differentialgleichung ein:

Mit $\dot{x}(t) = a\cdot x_0\cdot e^{at}$

und $\ddot{x}(t) = a^2\cdot x_0\cdot e^{at}$

erhält man

$$\begin{aligned} -D\cdot x_0\cdot e^{at} - k\cdot a\cdot x_0\cdot e^{at} &= m\cdot a^2\cdot x_0\cdot e^{at} && |:x_0\cdot e^{at} \\ -D - k\cdot a &= m\cdot a^2 && |+D+k\cdot a \\ 0 &= m\cdot a^2 + k\cdot a + D \end{aligned}$$

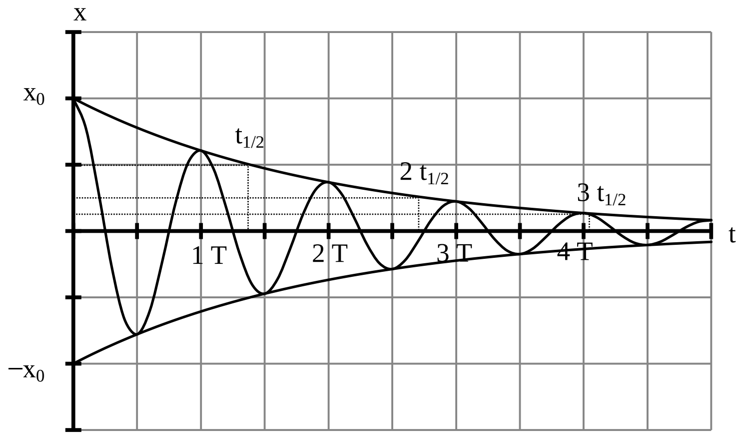
Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist $a_{1/2} = \dfrac{-k \pm\sqrt{k^2 - 4\cdot m\cdot D}}{2m}$

Für **schwache Dämpfung** mit $k < 2\sqrt{m \cdot D}$ ist der Radikand negativ und die Wurzel imaginär:

$$a_{1/2} = \underbrace{-\frac{k}{2m}}_{-\delta} \pm \underbrace{i\sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}}_{i\omega}$$

$$a_{1/2} = -\delta \pm i\omega$$

Mit der **Eulerschen Identität** $e^{i\omega} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$ erhält man die allgemeine Lösung $x(t) = x_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot [\cos(\omega t) \pm i \cdot \sin(\omega t)]$. Die tatsächliche Bewegung wird beschrieben durch dem **Realteil** $x(t) = x_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)$ mit **Dämpfungsfaktor** $\delta = \frac{k}{2m}$ und **Winkelgeschwindigkeit** $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}}$. Die Amplitude nimmt exponentiell ab mit der **Halbwertszeit** $\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\delta}}$:

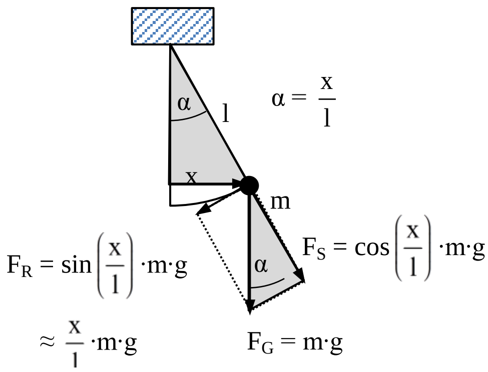


Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 6 und 7

4.1.3 Das mathematische Pendel

Eine Masse m hängt an einem Faden der Länge l und wird um x_0 horizontal aus der Ruhelage ausgelenkt. Nach dem Loslassen schaukelt das Pendel periodisch.
Die **Rückstellkraft** F_R ist die **Komponente der Gewichtskraft** $F_G = m \cdot g$, die senkrecht zur Seilrichtung wirkt.
Für **kleine Winkel** α gilt $\sin(\alpha) \approx \alpha$ und man erhält aus dem 2. Newtonschen Axiom (siehe Skizze) die Differentialgleichung

$$\boxed{-\frac{x(t)}{l} \cdot m \cdot g = m \cdot \ddot{x}(t)}.$$



Sie entspricht der Differentialgleichung der Federschwingung mit $D = \frac{m \cdot g}{l}$.

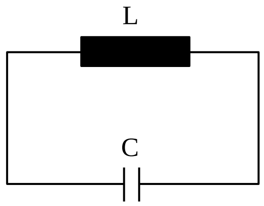
Durch Einsetzen von $D = \frac{m \cdot g}{l}$ in die Lösungen aus 4.1.1 erhält man die **Winkelgeschwindigkeit** $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$ und die **Periodendauer** $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

Ebenso wie die Fallgeschwindigkeit eines Körpers ist auch die Periodendauer eines Pendels unabhängig von der Masse!

Im gedämpften Fall erhält man wieder durch Einsetzen von $D = \frac{m \cdot g}{l}$ in die Lösungen aus 4.1.2. den gleichen **Dämpfungsfaktor** $\delta = \frac{k}{2m}$ und verminderte **Winkelgeschwindigkeit** $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}}}$.

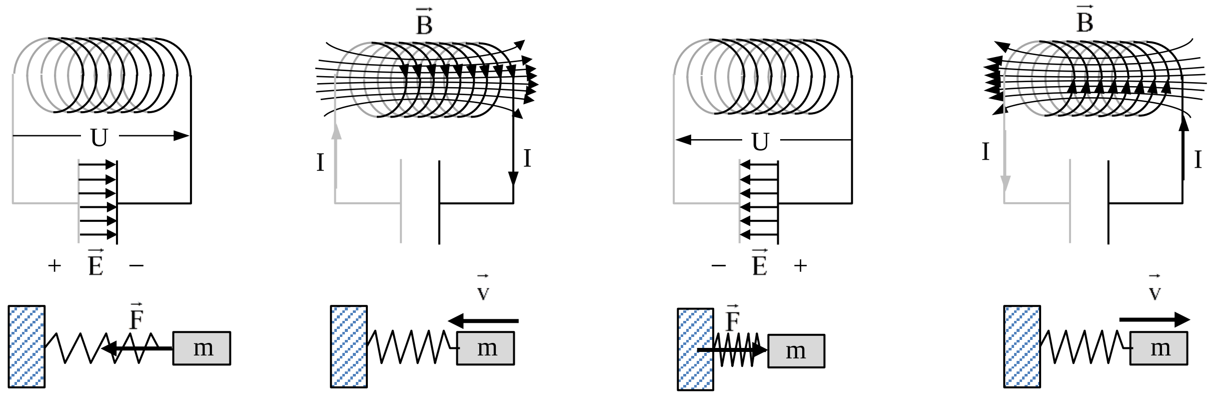
Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 8 - 13

4.1.4 Der ungedämpfte Schwingkreis



Schließt man einen mit der Ladung Q_0 geladenen Kondensator der Kapazität C mit einer Spule der Induktivität L kurz, so schwingen die Ladungen anschließend periodisch hin und her wie bei einer Federschwingung. Nach der Lenzschen Regel bremst die Spule zunächst die plötzliche Entladung des Kondensators. Dem Absinken der Stromstärke stellt sie sich aber auch wieder entgegen und lädt den Kondensator in die andere Richtung auf.

Anschaulich lässt sich die Pendelbewegung zwischen Kondensator und Spule mit dem **Federpendel** selbst gut vergleichen:



Durch die **Addition der Spannungen** erhält man eine **Differentialgleichung** von der gleichen Form wie bei der Federschwingung: $U_L + U_C = 0 \Leftrightarrow L\cdot \dot{I} + \frac{Q}{C} = 0$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{L\cdot \ddot{Q} = -\frac{Q}{C}}$$

In der Gleichung der Federschwingung $-D\cdot x(t) = m\cdot \ddot{x}(t)$ ersetzen wir x(t) durch Q(t); m durch L sowie D durch $\frac{1}{C}$ und erhalten die

Ladungs-Zeit-Funktion $Q(t) = Q_0\cdot\cos(\omega t)$ mit der **Winkelgeschwindigkeit** $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Es handelt sich genau um die **Sperrfrequenz** der entsprechenden LC-Parallelschaltung bzw. die **Siebfrequenz** der entsprechenden LC-Reihenschaltung: Lässt man die Schaltung allein, so sucht sie sich selbst die Frequenz, bei der der Strom am besten durch die Reihenschaltung kommt, d.h., bei dem sich die beiden Blindwiderstände genau kompensieren!

Durch Ableiten erhält man die

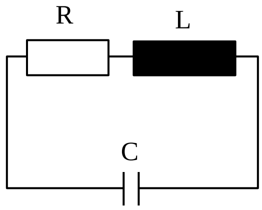
Strom-Zeit-Funktion $I(t) = -I_0\cdot\sin(\omega t)$ mit dem **Spitzenstrom** $I_0 = Q_0\cdot\omega = Q_0\cdot\sqrt{LC}$.

Durch Einsetzen in die Kapazitätsgleichung ergibt sich die

Spannungs-Zeit-Funktion $U(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0\cdot\cos(\omega t)$ mit der **Spitzenspannung** $U_0 = \frac{Q_0}{C}$

Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 14 - 16

4.1.5 Der gedämpfte Schwingkreis



Durch den unvermeidlichen **ohmschen Widerstand** R der Spule wird der Schwingkreis genauso gedämpft wie die Feder oder das Pendel durch eine zähe Flüssigkeit. Die „Bremsspannung" $U = R\cdot I$ ist nämlich wieder proportional zur „Geschwindigkeit" der Ladung $I = \dot{Q}$.
Die Addition der Spannungen

$$U_L + U_R + U_C = 0 \Leftrightarrow L\cdot\dot{I} + R\cdot I + \frac{Q}{C} = 0 \Leftrightarrow \boxed{L\cdot\ddot{Q} + R\cdot\dot{Q} = -\frac{Q}{C}}$$

entspricht wieder der Gleichung für die gedämpfte Federschwingung

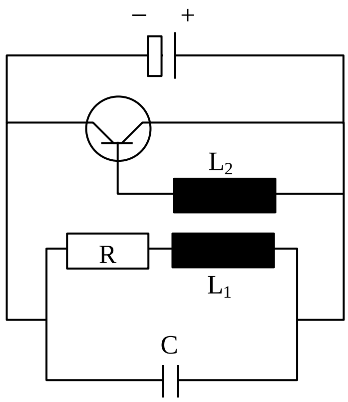
$-D\cdot x - k\,\dot{x} = m\cdot\ddot{x}(t)$ mit $x(t) = Q(t)$; $m = L$; $k = R$ und $D = \frac{1}{C}$.

Entsprechend erhält man die Ladungs-Zeit-Funktion in der gleichen Form

$Q(t) = Q_0\cdot e^{\delta t}\cdot\cos(\omega t)$ mit **Dämpfungsfaktor** $\delta = -\frac{R}{2L}$ und **Winkelgeschwindigkeit** $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

Für die **Strom-Zeit-Funktion** und die Phasenverschiebung φ zieht man sich nach bewährtem Muster auf die komplexe Form $Q(t) = Q_0\cdot e^{(\delta + i\omega)t}$ zurück und leitet ab: $I(t) = \dot{Q}(t) = Q_0\cdot(\delta + i\omega)\cdot e^{(\delta + i\omega)t}$ entsteht aus Q(t) durch Drehung um die **Phasenverschiebung** $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\delta}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}\right)$ und Multiplikation mit dem Betrag $\sqrt{\delta^2 + \omega^2}$. Man kann also auch schreiben $I(t) = I_0\cdot e^{\delta t}\cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$ mit der **Spitzenstromstärke** $I_0 = Q_0\cdot\sqrt{\delta^2 + \omega^2}$. Der **Realteil** ist $I(t) = I_0\cdot e^{\delta t}\cdot\cos(\omega t + \varphi)$.

Die **Teilspannungen** $U_R = I\cdot R$, $U_C = \frac{Q}{C}$ und $U_L = L\cdot\dot{I}$ erhält man durch Einsetzen bzw. erneutes Ableiten von I(t).



Schwingkreise in Uhren und Radiosendern wie z.B. in Mobiltelefonen müssen durch **Rückkopplung** in Schwing gehalten werden, um die Dämpfung auszugleichen. Dabei wird wie beim **Anstoßen einer Schaukel** mittels einer **induktiv gekoppelten Spule** L_2 die Stromrichtung und einen **Transistor** immer dann eine Zusatzspannung angeschaltet, wenn die Stromrichtung des Schwingkreises mit der Stromrichtung des Verstärkerkreises übereinstimmt.

Übungen: Aufgaben zu Schwingungen Nr. 17